

Méthode des éléments finis

appliquée à la mécanique des structures

PLAN

1. Les principes,
2. Problèmes de statique 1D,
3. Problèmes plan 2D.

BIBLIOGRAPHIE

- L. Chevalier. Mécanique des systèmes et des milieux déformables. Cours, exercices et problèmes corrigés, Ellipses, 2004.
- Yves Debard. Méthode des Eléments Finis
- Hervé Oudin. Méthode des éléments finis.
- Michel SUDRE. Méthode des Eléments Finis appliquée au calcul des Structures.
http://www.mecaero.upstlse.fr/M1_CCS.html

TP

Ce cours utilise des calculs éléments finis sous le logiciel RDM6 Gratuit à télécharger depuis :

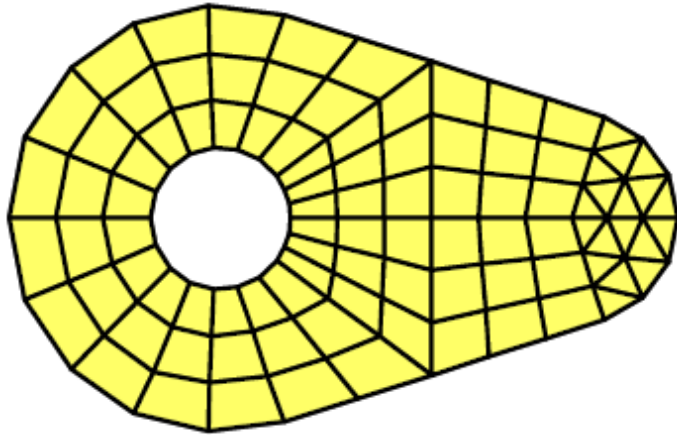
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

PLAN

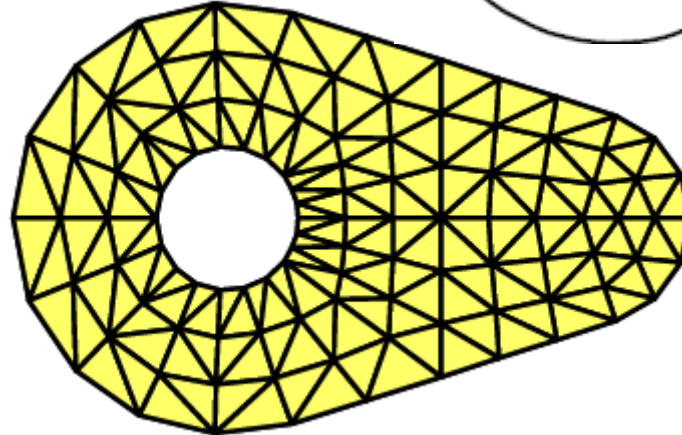
1. Les principes,
2. Problèmes de statique 1D,
3. Problèmes plan 2D.

La Méthode des Éléments Finis consiste à :

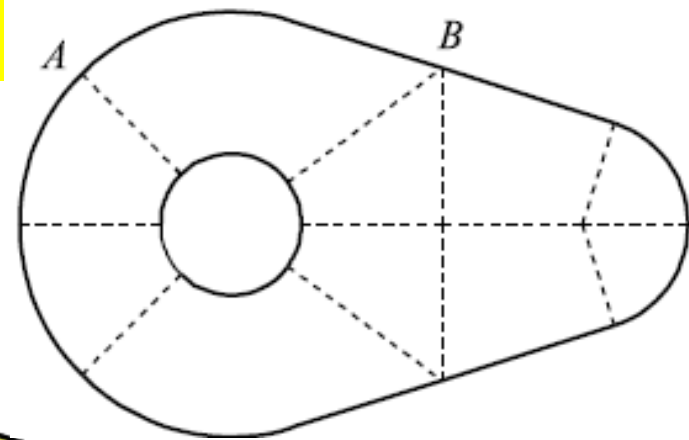
Élément quadrangle
(2D)



Élément triangle
(2D)



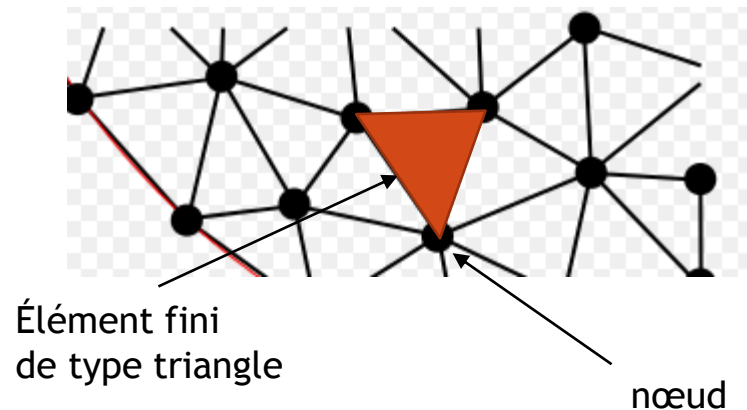
ou



- découper la structure en des subdivisions de formes simples,
- et à choisir une approximation du déplacement sur chaque subdivision.

C'est une méthode de Ritz « par morceaux » qui s'adapte aux géométries les plus complexes.

- Les subdivisions sont appelées :
Éléments finis,
- Les connexions entre éléments sont appelées :
Nœuds.

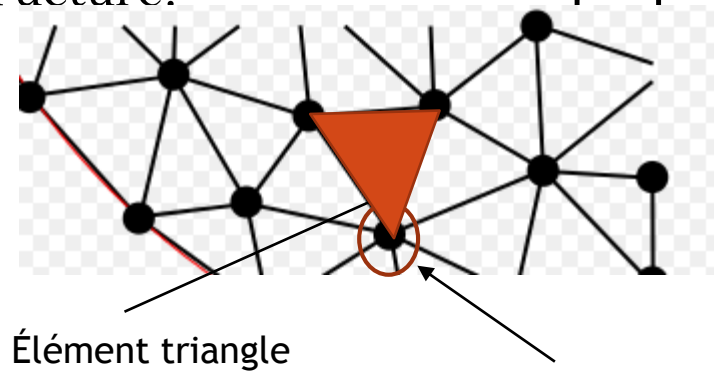
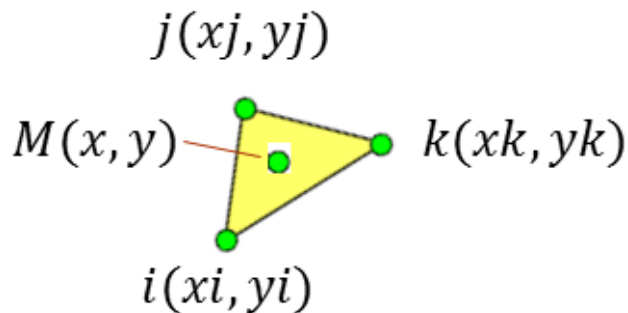


Il existe 3 grandes familles d'éléments :

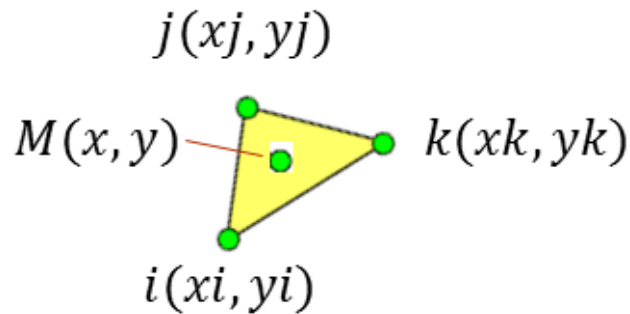
- Les éléments uni-dimensionnels En 1D : barre ou poutre
modèle uni-dimensionnel s'appuie sur les hypothèses de la mécanique des structures (RDM).
- Les éléments bi-dimensionnels En 2D et tri-dimensionnels En 3D :
membranes, plaques et coques

Le modèle bi-dimensionnel ou tri-dimensionnel utilise, selon les cas, les théories des membranes, des plaques et des coques ou exploite les relations de l'élasticité.

- Pour le nœud i : les composantes des déplacements sont: (u_i, v_i) en 2D ou (u_i, v_i, w_i) en 3D : $\rightarrow \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{bmatrix}$
- Si l'élément (e) introduit 3 nœuds (i, j, k) alors le nombre d'inconnus est 6 (2D) ou 9 (3D)
On range ces inconnus dans une colonne appelée vecteur des **déplacements nodaux** de l'élément e . $\rightarrow \langle U_e \rangle = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$
- Si le maillage introduit n nœuds alors le nombre d'inconnus est $2n$ (2D) ou $3n$ (3D).
On range ces inconnus dans une colonne appelée vecteur des **déplacements globaux** de la structure. $\rightarrow \langle U \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$



Pour un élément (e) :



On adopte l'approximation:

$$\vec{u}^*(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \dots & N_{1 \ 2n} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \dots & N_{2 \ 2n} \end{bmatrix}}_{[N_e(M)]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}}_{\langle U_e \rangle}$$

$$\Rightarrow \vec{u}^*(M) = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$

$\vec{u}^*(M)$ est l'**approximation** des déplacements réels $\vec{u}(M)$

$[N_e(M)]$: est la **matrice d'interpolation élémentaire**.

$N_{ij}(M)$: sont les **fonctions d'interpolation élémentaires**.

$\langle U_e \rangle$: vecteur des **déplacements nodaux** de l'élément e.

$$\vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Avec : $\vec{u}^*(M) = [N_e(M)] \langle U_e \rangle = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \dots & N_{1 \ 2n} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \dots & N_{2 \ 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1 \ 2n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2 \ 2n} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3 \ 2n} \end{bmatrix}}_{[B_e(M)]} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$B_{1m} = \frac{\partial}{\partial x} [N_{1m}]$$

$$B_{2m} = \frac{\partial}{\partial y} [N_{2m}]$$

$$B_{3m} = \frac{\partial}{\partial y} [N_{1m}] + \frac{\partial}{\partial x} [N_{2m}]$$

$$\Rightarrow \vec{\varepsilon}(M) = [B_e(M)] \langle U_e \rangle$$

Lois de comportement :

$$\vec{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}}_{[C]} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}}_{[B_e(M)]\langle U_e \rangle}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}(M) = [C][B_e(M)]\langle U_e \rangle$$

On utilise l'énergie de déformation ou la formulation intégrale du PTV.

Les deux méthodes utilisent les déplacements nodaux dans le calcul.

Si le comportement est linéaire, on obtient un système du type:

$$[M_G]\langle\ddot{U}\rangle + [K_G]\langle U \rangle = \langle F_G \rangle$$

Ou encore si le problème est statique, le système s'écrit :

$$[K_G]\langle U \rangle = [F_G]$$

$[M_G]$: Matrice de masse globale,

$[K_G]$: Matrice de raideur globale,

$\langle U \rangle$: Vecteur des déplacements nodaux.

$\langle F_G \rangle$: Vecteur de forces nodales.

La solution d'un problème de structure mécanique : $\langle U \rangle$ s'obtient-en résolvant le système linéaire.

PLAN

1. Les principes,
2. Problèmes de statique 1D,
3. Problèmes plan 2D.

Soit un corps élastique soumis à n forces $\mathbf{P}_i$ aux points $\mathbf{A}_i$ leur imposant des déplacements $\mathbf{U}_i$

Le travail total fournit ou l'énergie élastique correspondante :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i U_i \quad \text{1F de Clapeyron}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P} \rangle^T \langle \mathbf{U} \rangle \quad \text{Forme quadratique}$$

le déplacement d'un point A_i s'écrit

$$U_i = \underbrace{U_{i1}}_{a_{i1}P_1} + U_{i2} + \cdots + \underbrace{U_{ij}}_{a_{ij}P_j} + \cdots + U_{in} = \sum_{j=1}^n U_{ij} \quad \text{La proportionnalité entre forces et déplacements}$$

U_{ij} : contribution de P_j au déplacement du point A_i dans la direction de P_i

$$U_i = a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \cdots + a_{ij}P_j + \cdots + a_{in}P_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}P_j \quad \langle \mathbf{U} \rangle = [\mathbf{a}] \langle \mathbf{P} \rangle$$

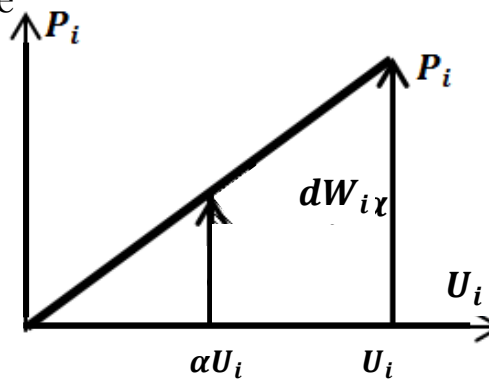
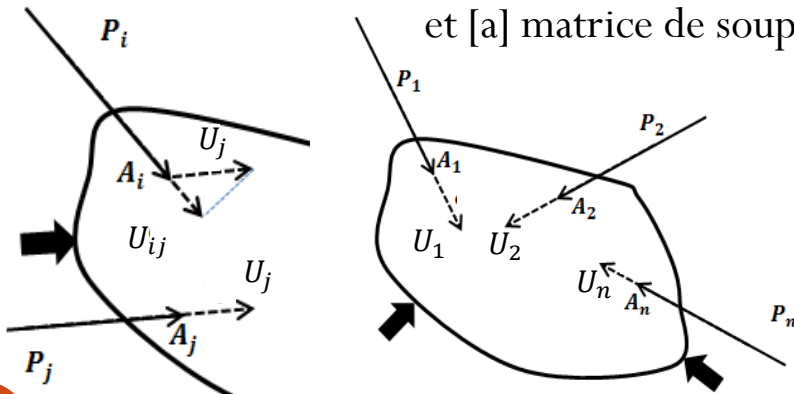
a_{ij} coefficient d'influence ou de souplesse,
et $[\mathbf{a}]$ matrice de souplesse

D'après la 1F de Clapeyron :

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P} \rangle^T [\mathbf{a}] \langle \mathbf{P} \rangle$$

2F de Clapeyron

C'est la forme quadratique de l'énergie de déformation



En fonction de $[a]$ matrice de souplesse : $\langle U \rangle = [a] \langle P \rangle$ et $W = \frac{1}{2} \langle P \rangle^T [a] \langle P \rangle$

Introduisons la matrice de raideur $[k]$: $\langle P \rangle = [k] \langle U \rangle$ avec $[k] = [a]^{-1}$

$[k]$ est une matrice carrée et symétrique et : $[k]^T = [k] = [a]^{-1}$

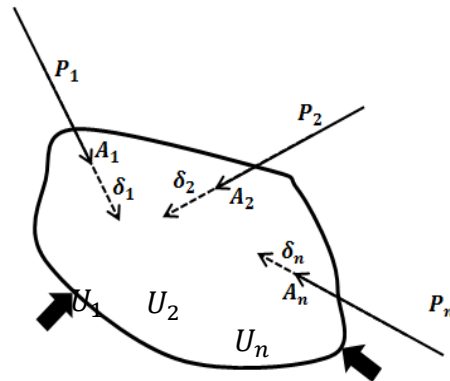
Introduisons la matrice de raideur dans l'expression de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \langle P \rangle^T [a] \langle P \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \underbrace{[k]^T [a] [k]}_{[I]} \langle U \rangle$$

d'où l'expression de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [k] \langle U \rangle$$

C'est la forme quadratique de l'énergie de déformation en fonction de la matrice raideur



Pour réaliser cette opération, on exprime les énergies élémentaires en fonction des variables globales : $\langle U \rangle$ est le vecteur déplacement global et $[K]$ matrice de rigidité globale :

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [k] \langle U \rangle = \sum_{e=1}^n W_e \\
 &= \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U^e \rangle^T [k_e] \langle U^e \rangle && \langle U^e \rangle \text{ déplacement nodal} \\
 &= \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [K_e] \langle U \rangle && \langle U \rangle \text{ déplacement global} \\
 &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \left(\sum_{e=1}^n [K_e] \right) \langle U \rangle
 \end{aligned}$$

$[K_e] \neq [k_e]$
 $[K_e]$ est de dim nxn

D'où l'expression de la matrice de rigidité globale : $[k] = \sum_{e=1}^n [K_e]$

Dans la matrice $[k]$ obtenue par expansion de $[k_e]$, les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément (e).

De même, le travail des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle F \rangle = \sum_{e=1}^n W_{\text{ext}}^e \\ &= \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U^e \rangle^T \langle f^e \rangle \\ &= \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle F^e \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \left(\sum_{e=1}^n \langle F^e \rangle \right) \end{aligned}$$

D'où l'expression du vecteur force global :

$$\langle F \rangle = \sum_{e=1}^n \langle F^e \rangle$$

L'égalité $W = W_{ext}$ permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \langle U \rangle^T [k] \langle U \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle F \rangle$$

Ou encore :

$$[k] \langle U \rangle = \langle F \rangle$$

Méthode directe ou résolution par blocs, nécessite de modifier (ou réarranger) les termes des matrices (élimination de ligne - colonne). Elle est utilisée dans le cas où les ddl sont limités.

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_i \end{Bmatrix}$$

U_i : sont les déplacements **inconnus** (libres)

U_c : sont les déplacements **connus** (imposés)

F_c : Forces (**connues**) correspondant aux déplacements **inconnus**

F_i : Forces (**inconnues**) correspondantes aux déplacements **connus** *réactions d'appuis*

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \{U_i\} &= [k_{11}]^{-1} (\{F_c\} - [k_{12}]\{U_c\}) \\ \{F_i\} &= [k_{21}]\{U_i\} + [k_{22}]\{U_c\} \end{aligned}$$

Cas particulier fréquent

$$\begin{aligned}\{U_i\} &= [k_{11}]^{-1}(\{F_c\} - [k_{12}]\{U_c\}) \\ \{F_i\} &= [k_{21}]\{U_i\} + [k_{22}]\{U_c\}\end{aligned}$$

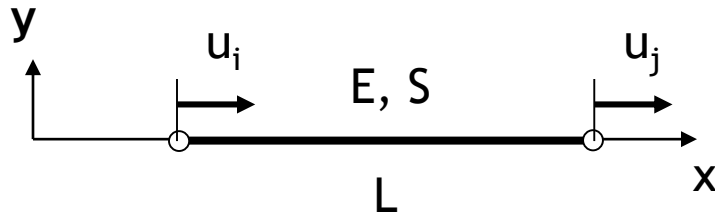
Si $\{U_c\} = \{0\}$:

$$\begin{aligned}\{U_i\} &= [k_{11}]^{-1}\{F_c\} \\ \{F_i\} &= [k_{21}]\{U_i\}\end{aligned}$$

Seules les termes $[k_{11}]$ et $[k_{21}]$ de la matrices de raideur globale sont à calculer.

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix}$$

Données



E : module d'Young (N/m^2) - S : section (m^2) - L : longueur (m)

Bilan :

- ☐ 1 élément
- ☐ 2 nœuds
- ☐ 2 ddl : 1 ddl/nœud (u_i, u_j)

Les déplacements nodaux
de l'élément barre :

$$U = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$$

On cherche une approximation des déplacements : $\vec{u}^*(M) = [N_e(M)] \underbrace{\langle U_e \rangle}_{U = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}}$

Sont les déplacements nodaux de l'élément barre :

1. Soit l'approximation nodale : $U^*(x) = a_0 + a_1 x$ Approximation linéaire

Ou sous forme matricielle : $U^*(x) = \langle 1, x \rangle \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}}_{\langle A \rangle = f(\langle U_e \rangle)}$ a_0 et a_1 ctes à déterminer par CL

2. Les conditions aux limites : $i : x = 0$ et $i : x = L$

$$\langle U_e \rangle = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

$$\rightarrow \langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

$$3. \quad U^*(x) = \langle 1, x \rangle \underbrace{\langle A \rangle}_{[N_e]} = \underbrace{\langle 1, x \rangle [P_e(M)]^{-1}}_{[N_e]} \langle U_e \rangle = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$

D'où

$$U^*(x) = \left\langle 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right\rangle \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$$

$$U^*(x) = \left\langle 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \right\rangle \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$$

L'énergie de déformation s'écrit : $W_d = \frac{1}{2} \int_{str} \frac{N^2}{ES} \cdot dx = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [k] \langle U \rangle$

$$W_d = \frac{1}{2} ES \int_{str} \left(\frac{dU}{dx} \right)^2 dx$$

$$U'^2 = \{U\}^T [A] \{U\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} u_i u_j$$

Est la formes quadratique de U'

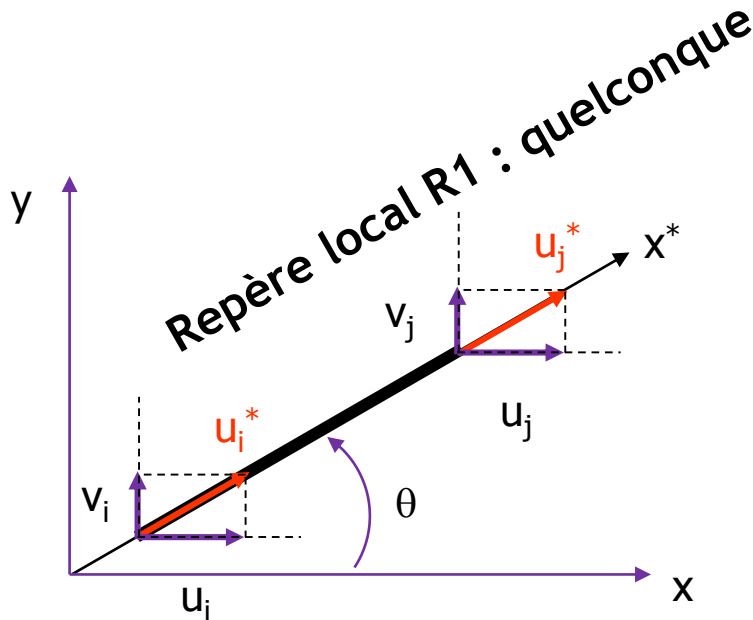
$$\Rightarrow W_d = \frac{1}{2} \{U\}^T \underbrace{\left(ES \int_{str} [A] dx \right)}_{[k]} \{U\} \Rightarrow K = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Repère local R1 : Orienté suivant l'axe x

$$U^* = \begin{pmatrix} u_i^* \\ u_j^* \end{pmatrix}$$

$$K_{R_1} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Repère global R₂

$$U = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix}$$

$$K_{R_2} = ?$$

$$U^* = f(U)$$

??

Énergie de déformation :

Repère local :

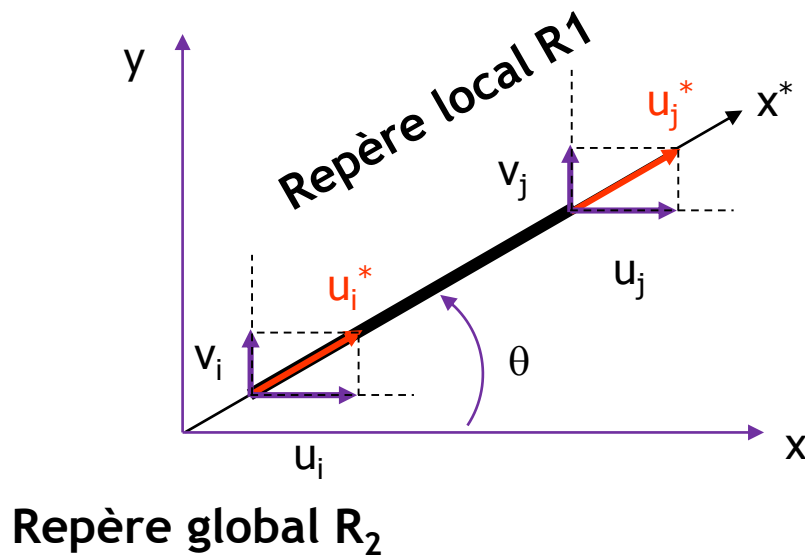
$$W = \frac{1}{2} U^{*t} K_{R_1} U^*$$

Repère global :

$$W = \frac{1}{2} U^t \boxed{K_{R_2}} U$$

$$\rightarrow U^* = f(U) \quad ??$$

$$\begin{matrix} u_i^* & \vec{x}^* = u_i & \vec{x} + v_i & \vec{y} \\ u_j^* & \vec{x}^* = u_j & \vec{x} + v_j & \vec{y} \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} u_i^* = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta \\ u_j^* = u_j \cos \theta + v_j \sin \theta \end{cases}$$



Sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} u_i^* \\ u_j^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix}$$

$$U^* = \begin{matrix} & T \\ & \\ & \\ & \end{matrix} U$$

Énergie de déformation :

$$U^{*t} = U^t T^t \quad \quad U^* = TU$$
$$W = \frac{1}{2} U^{*t} K_{R_1} U^*$$


$$W = \frac{1}{2} U^t T^t K_{R_1} T U$$

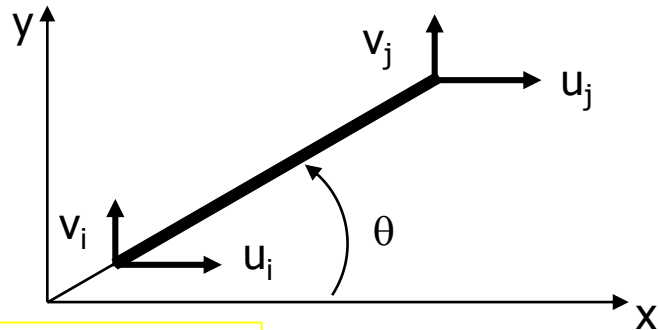
Expression que l'on compare à

$$W = \frac{1}{2} U^t K_{R_2} U$$

On en déduit :

$$K_{R_2} = T^t K_{R_1} T$$

Pour l'élément barre, on obtient :



$$K_{R_1} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$K_{R_2} = T^t K_{R_1} T$$

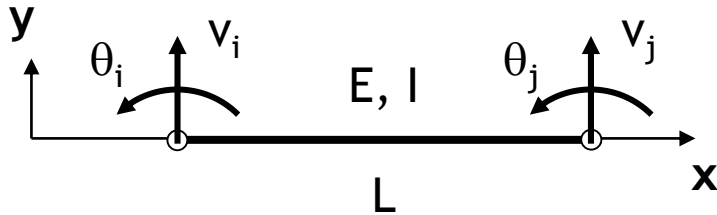
$$K = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} \boxed{\cos^2 \theta} & \boxed{\cos \theta \sin \theta} & \boxed{-\cos^2 \theta} & \boxed{-\cos \theta \sin \theta} \\ \boxed{\cos \theta \sin \theta} & \boxed{\sin^2 \theta} & \boxed{-\cos \theta \sin \theta} & \boxed{-\sin^2 \theta} \\ \boxed{-\cos^2 \theta} & \boxed{-\cos \theta \sin \theta} & \boxed{\cos^2 \theta} & \boxed{\cos \theta \sin \theta} \\ \boxed{-\cos \theta \sin \theta} & \boxed{-\sin^2 \theta} & \boxed{\cos \theta \sin \theta} & \boxed{\sin^2 \theta} \end{pmatrix} U = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix}$$

ou encore :

$$K_{R_2} = \frac{ES}{L} \begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Attention : pas de ddl de rotation donc liaison pivot aux nœuds implicite

Poutre type Bernoulli : pas de cisaillement transverse



E : module d'Young (N/m^2) - I : inertie de flexion (m^4) - L : longueur (m)

Bilan :

- ☐ 1 élément
- ☐ 2 nœuds
- ☐ 4 ddl : 2 ddl/nœud ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$)

$$U = \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

On cherche une approximation des déplacements : $\vec{u}^*(M) = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$

- On adopte l'approximation nodale :

$$\begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ \theta^*(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\langle A \rangle}$$

$$U = \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

a_i ctes à déterminer par les CL

- Les conditions aux limites permettent d'écrire :

$$\underbrace{\langle U_e \rangle}_{\substack{x=0 \\ x=L}} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}}_{\substack{x=0 \\ x=L}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}}_{[P_e]} \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\langle A \rangle} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

$$\Rightarrow \langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{pmatrix}}_{[N_e]} [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

$$\begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{pmatrix} [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

→

$$v^*(x) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \langle N_e \rangle \langle U_e \rangle$$

Avec :

$$\begin{cases} N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_2 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \\ N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{cases}$$

Calcul Matlab

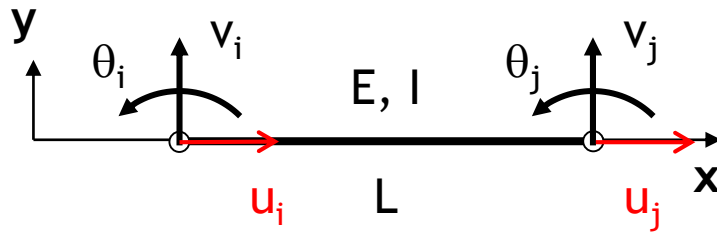
$$[P_e(M)]^{-1} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0 \\ -3/L^2, & -2/L, & 3/L^2, & -1/L \\ 2/L^3, & 1/L^2, & -2/L^3, & 1/L^2 \end{bmatrix}$$

Calcul Matlab $[N_e] =$

$$\begin{bmatrix} (2x^3)/L^3 - (3x^2)/L^2 + 1, & x - (2x^2)/L + x^3/L^2, & (3x^2)/L^2 - (2x^3)/L^3, & x^3/L^2 - x^2/L \\ (6x^2)/L^3 - (6x)/L^2, & (3x^2)/L^2 - (4x)/L + 1, & (6x)/L^2 - (6x^2)/L^3, & (3x^2)/L^2 - (2x)/L \end{bmatrix}$$

Le calcul de l'énergie de déformation permet d'avoir :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$



Bilan : 1 élément, 2 nœuds, 6 ddl :
3 ddl/nœud ($u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$)

$$U = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$$

Traction

$$K = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & -\frac{ES}{L} \\ -\frac{ES}{L} & \frac{ES}{L} \end{bmatrix}$$

Flexion

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

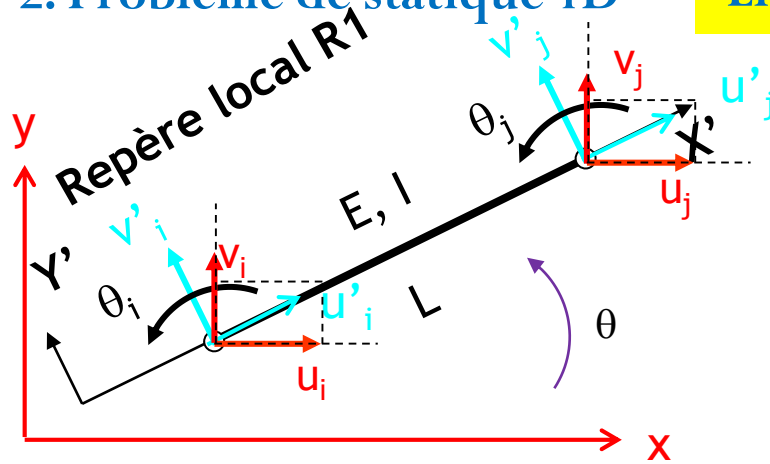
$$K = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

2. Problème de statique 1D

Elément poutre

+ déplacement axial

+ orientation arbitraire



Repère global R_2

$$\begin{cases} u_i^* = u_i \cos \theta + v_i \sin \theta \\ v_i^* = -u_i \sin \theta + v_i \cos \theta \end{cases}$$

Les moments et les rotations ne sont pas concernés par la transformation.
Sous forme matricielle pour les deux nœuds :

$$\begin{bmatrix} u'_i \\ v'_i \\ \theta_i \\ u'_j \\ v'_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{bmatrix}$$

$U^* = T U$

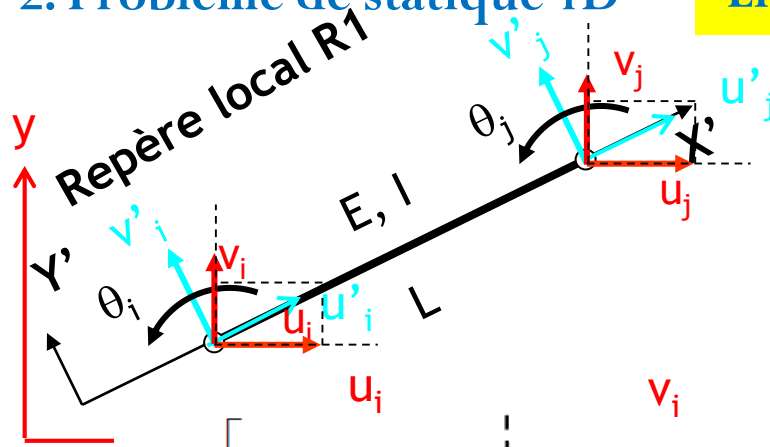
2. Problème de statique 1D

Elément poutre

+ déplacement axial

+ orientation arbitraire

$$K_{R_2} = T^t K_{R_1} T$$



$$\underline{K} = \frac{E}{L}$$

	u_i	v_i	θ_i	u_j	v_j	θ_j
u_i	$A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.S^2$	$(A - \frac{12I}{L^2}).c.s$	$-\frac{6I}{L}.s$	$-(A.c^2 + \frac{12I}{L^2}).s^2$	$-(A - \frac{12I}{L^2}).c.s$	$-\frac{6I}{L}.s$
v_i		$A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2$	$\frac{6I}{L}.c$		$-(A - \frac{12I}{L^2}).c.s$	$\frac{6I}{L}.c$
θ_i			$4I$		$\frac{6I}{L}.s$	$2I$
u_j				$A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.s^2$	$(A - \frac{12I}{L^2}).c.s$	$\frac{6I}{L}.s$
v_j					$A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2$	$-\frac{6I}{L}.c$
θ_j						$4I$

SYMETRIQUE

A (section S) pour ne pas la confondre avec sinus

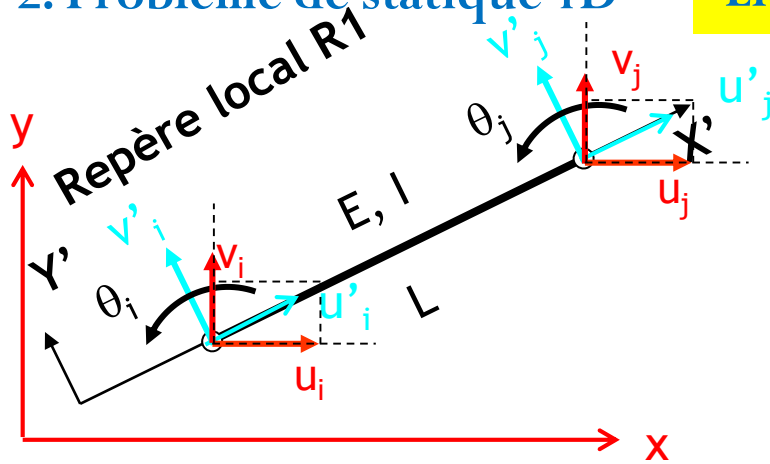
2. Problème de statique 1D

Elément poutre

Pas de déplacement axial

+orientation arbitraire

$$K_{R_2} = T^t K_{R_1} T$$



Repère global R_2

Pas de traction

$$\underline{K}^e = \frac{E.I}{L^3} \cdot \left[\begin{array}{ccc|ccc} 12s^2 & -12s.c & -6L.s & -12s^2 & 12s.c & -6L.s \\ -12s.c & 12c^2 & 6L.c & 12s.c & -12c^2 & 6L.c \\ -6L.s & 6L.c & 4L^2 & 6L.s & -6L.c & 2L^2 \\ \hline -12s^2 & 12s.c & 6L.s & 12s^2 & -12s.c & 6L.s \\ 12s.c & -12c^2 & -6L.c & -12s.c & 12c^2 & -6L.c \\ -6L.s & 6L.c & 2L^2 & 6L.s & -6L.c & 4L^2 \end{array} \right]$$

PLAN

1. Les principes,
2. Problème de statique 1D,
3. Problème plan 2D.

Le principe des travaux virtuels pour un problème de déformation de structures continue D s'écrit quel que soit le champ de déplacement virtuel $\vec{u}^*$

$$\underbrace{\int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv}_{\text{Travail virtuel d'accélération}} = \underbrace{\int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv}_{\text{Travail virtuel des efforts extérieurs volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds}_{\text{Travail virtuel des efforts extérieurs surfaciques}} - \underbrace{\int_D \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\varepsilon}}^* dv}_{\text{Travail virtuel des efforts intérieurs}}$$

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u^*_{i,j} + u^*_{j,i})$
 $\uparrow$

$W_d = - W_{int}$

Avec

$$\vec{u} = [N_e(M)] \langle u_e \rangle \quad \text{et} \quad \vec{u}^* = [N_e(M)] \langle u^* \rangle$$

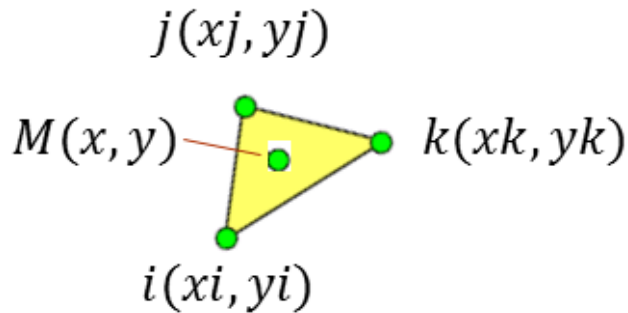
Les déplacements réels et virtuels ont la même forme.

L'accélération a pour expression :

$$\vec{\gamma} = [N_e(M)] \frac{d^2}{dt^2} \langle u_e \rangle = [N_e(M)] \langle \ddot{u}_e \rangle$$

Approximation des déplacements

Pour un élément (e) :



On pose :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(M) \\ v(M) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & \dots & N_{1 \ 2n} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & \dots & N_{2 \ 2n} \end{bmatrix}}_{[N_e(M)]} \underbrace{\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}}_{\langle u_e \rangle}$$

$$\vec{u}(M) = [N_e(M)] \langle u_e \rangle$$

$\vec{u}(M)$ est l'approximation des déplacements réels

$[N_e(M)]$: est la matrice d'interpolation élémentaire.

$N_{ij}(M)$: sont les fonctions d'interpolation élémentaires.

$\langle u_e \rangle$: regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'élément (e).

Déformations

$$\vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Avec : $\vec{u}(M) = [N_e(M)]\langle u_e \rangle$

Ce qui donne :

$$\vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1 \ 2n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \dots & B_{2 \ 2n} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \dots & B_{3 \ 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\varepsilon}(M) = [B_e(M)]\langle u_e \rangle$$

Contraintes

Lois de comportement :

$$\vec{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\vec{\sigma}(M) = [C][B_e(M)]\langle u_e \rangle$$

$$\underbrace{\int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv}_{\text{Travail virtuel d'accélération}} = \int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv + \int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds - \int_D \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\epsilon}}^* dv$$

Travail virtuel
d'accélération

$$\begin{aligned} \int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv &= \int_D \rho \langle \ddot{u}_e \rangle^T [N_e(M)]^T [N_e(M)] \langle u^* \rangle dv \\ &= \langle \ddot{u}_e \rangle^T \left(\int_D \rho [N_e(M)]^T [N_e(M)] dv \right) \langle u^* \rangle \\ &= \langle \ddot{u}_e \rangle^T [M_e] \langle u^* \rangle \end{aligned}$$

Avec :

$$[M_e] = \int_D \rho [N_e(M)]^T [N_e(M)] dv$$

$$\int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv = \underbrace{\int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv}_{\text{Travail virtuel des efforts extérieurs volumiques}} + \underbrace{\int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds}_{\text{Travail virtuel des efforts extérieurs surfaciques}} - \int_D \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\epsilon}}^* dv$$

Travail virtuel
des efforts
extérieurs
volumiques

Travail virtuel
des efforts
extérieurs
surfaciques

$$\int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv + \int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds$$

$$= \left(\int_D [f_v]^T [N_e(M)] dv + \int_{\partial D} [f_s]^T [N_e(M)] ds \right) \langle u^* \rangle$$

$$= [F_e]^T \langle u^* \rangle$$

Avec :

$$[F_e]^T = \int_D [f_v]^T [N_e(M)] dv + \int_{\partial D} [f_s]^T [N_e(M)] ds$$

$$\int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv = \int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv + \int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds - \int_D \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\epsilon}}^* dv$$

Travail virtuel
des efforts
intérieurs

$$\begin{aligned} \int_D \bar{\bar{\sigma}} : \bar{\bar{\epsilon}}^* dv &= \int_D \left[[C][B_e(M)] \langle u_e \rangle \right]^T [B_e(M)] \langle u^* \rangle dv \\ &= \langle u_e \rangle^T \left(\int_D B_e^T(M) [C]^T [B_e(M)] dv \right) \langle u^* \rangle \\ &= \langle u_e \rangle^T [K_e] \langle u^* \rangle \end{aligned}$$

D'où :

$$[K_e] = \int_D B_e(M)^T [C]^T [B_e(M)] dv$$

Quel que soit le champ de déplacement virtuelle $\vec{u}^*$

$$\langle \ddot{u}_e \rangle^T [M_e] \langle u^* \rangle = [F_e]^T \langle u^* \rangle - \langle u_e \rangle^T [K_e] \langle u^* \rangle$$

Ou encore en simplifiant par $\langle u^* \rangle$:

$$\langle \ddot{u}_e \rangle^T [M_e] = [F_e]^T - \langle u_e \rangle^T [K_e] \quad (E)$$

Avec :

$[M_e] = \int_D \rho [N_e(M)]^T [N_e(M)] dv$: matrice masse de l'élément e

$[K_e] = \int_D [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] dv$: Matrice raideur de l'élément e

$[F_e]^T = \int_D [f_v]^T [N_e(M)] dv + \int_{\partial D} [f_s]^T [N_e(M)] ds$: Vecteur force de l'élément e

Par construction $[M_e]$ et $[K_e]$ sont symétriques. Alors :

$$[M_e]^T = [M_e] \text{ et } [K_e]^T = [K_e]$$

Finalement l'équation (E) devient :

$$[M_e]\langle \ddot{u}_e \rangle + [K_e]\langle U_e \rangle = [F_e]$$

Les matrices globales de masse $[M_G]$ et de raideur $[K_G]$ de la structure s'obtiennent par assemblage des matrices de masse $[M_e]$ et de raideur $[K_e]$ de tous les éléments e.

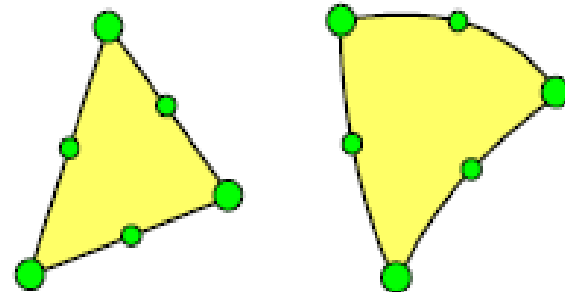
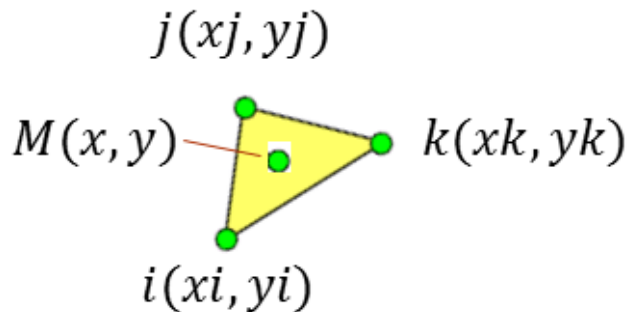
Triangles de degré 1 : triangles à 3 nœuds, fonctions linéaires

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \end{bmatrix}$$

Les a_i et b_i sont des ctes à déterminer par les CL

Triangles de degré 2 : triangles à 6 nœuds, polynômes de degré 2

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{bmatrix}$$



Quadrilatères de degré 1 : carrés à quatre nœuds, fonctions linéaires :

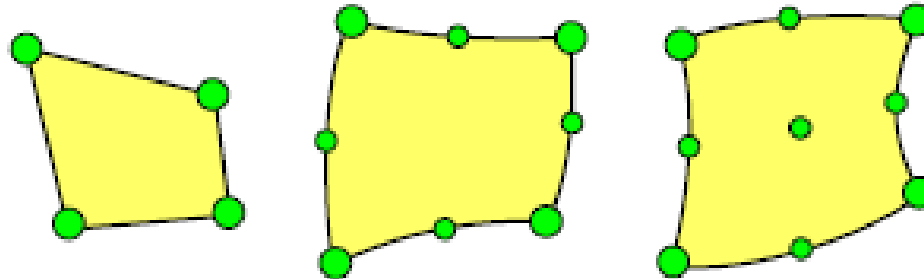
$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{bmatrix}$$

Quadrilatères de degré 2 : carrés à 8 nœuds, polynômes de degré 2 :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 \end{bmatrix}$$

Quadrilatères de degré 2 : carrés à 9 nœuds, polynômes de degré 2 :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 + b_8x^2y^2 \end{bmatrix}$$



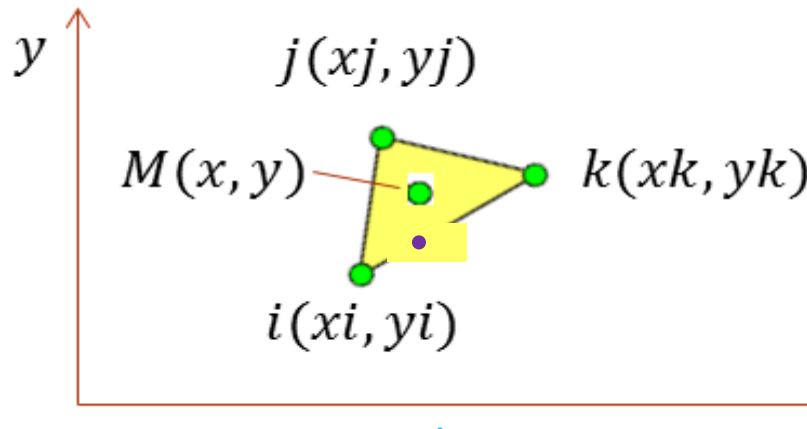
Par raison de simplification des calculs, on utilisera dans cette partie des éléments triangles à 3 nœuds.

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \end{bmatrix}$$

Les a_i et b_i sont des ctes à déterminer par les CL

Sous forme matricielle :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$



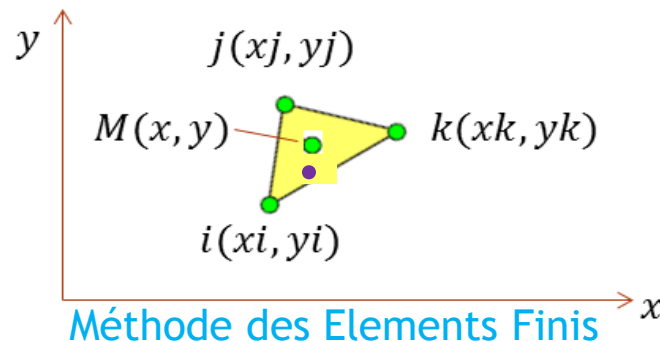
Les conditions aux limites permettent d'écrire aux points i, j et k :

$$\langle U_e \rangle = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

Avec :

$$\langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$



$$[P_e(M)] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [P_e(M)]^{-1} = \frac{1}{\Delta_e} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix}$$

$$\text{Et : } \begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases}$$

Les autres termes sont obtenus par permutation circulaire des indices (i,j,k).

$$\begin{aligned} \Delta_e &= x_i y_j - x_j y_i - x_i y_k + x_k y_i + x_j y_k - x_k y_j = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = \|\vec{ij} \wedge \vec{ik}\| \\ &= 2 * S_{ijk} \\ &= 2 * \text{Aire du triangle } (i, j, k) \end{aligned}$$

$$[N_e(M)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [P_e(M)]^{-1}$$

$$= \frac{1}{\Delta_e} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix}$$

Et : $\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases}$

$$= \frac{1}{2S_{ijk}} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix}$$

Avec : S_{ijk} : aire du triangle (i, j, k) et $\begin{cases} N1 = a_i + b_i x + c_i y \\ N2 = a_j + b_j x + c_j y \\ N3 = a_k + b_k x + c_k y \end{cases}$

Finalement :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \frac{1}{2S_{ijk}} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix} \overbrace{\langle U_e \rangle}^{[N_e(M)]} = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$

$$[K_e] = \int_D [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] dv \quad \text{avec} \quad [B_e(M)] = \frac{\partial}{\partial x_i} [N_e(M)] = \frac{1}{2S_{ijk}} \frac{\partial}{\partial x_i} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix}$$



$$[K_e] = [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] \int_D dv$$



$$\text{et : } \begin{cases} N1 = a_i + b_i x + c_i y \\ N2 = a_j + b_j x + c_j y \\ N3 = a_k + b_k x + c_k y \end{cases}$$

$$\text{Donc : } [B_e(M)] = \frac{1}{2S_{ijk}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix}$$

$dv = e \cdot dS_{ijk}$ e : épaisseur de la plaque.

$$\rightarrow [K_e] = [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] \cdot e \cdot S_{ijk}$$

$$\rightarrow [K_e] = \frac{1}{4S^2_{ijk}} \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_k & 0 & c_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} e S_{ijk}$$

Remarque : $[K_e]$ est une matrice $(6,6) = (6,3) * (3,3) * (3,6)$

Cas où les ddl sont limités.

On utilise la méthode directe ou résolution par blocs (ou de partition) vue au chap2

Cas de plusieurs ddl,

On utilise des méthodes numériques de résolution.

Ces méthodes sont vues en analyse Numérique.

Pour les problèmes de statique on trouvera dans les codes EF deux types de méthodes :

- Les méthodes directes : Élimination de Gauss, décomposition LDU, ou Cholesky ...
- Les méthodes itératives de type Gauss-Seidel.