

Mécanique des structures

Théorie des poutres

TORSION PURE

1. Hypothèses d'étude

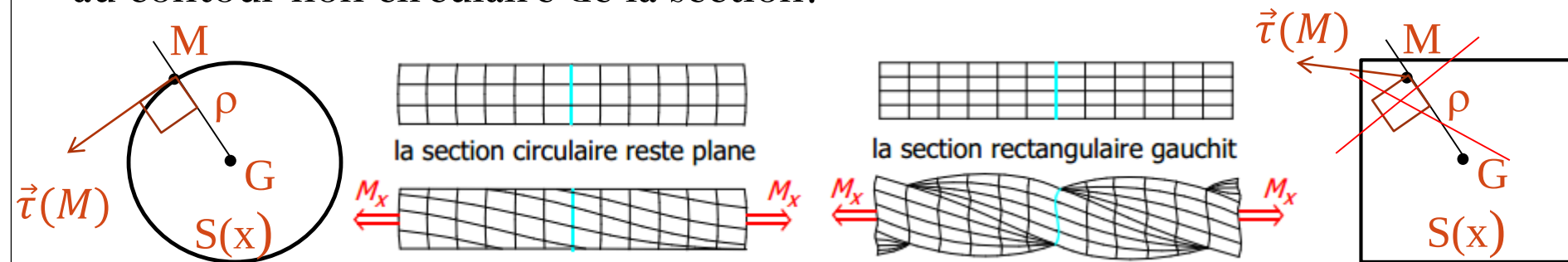
Le torseur de cohésion dans une section droite s'écrit:

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Les poutres étudiées sont des **cylindres de révolution à base circulaire**.

Pour toute section qui n'est pas circulaire :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,
- la contrainte de cisaillement ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

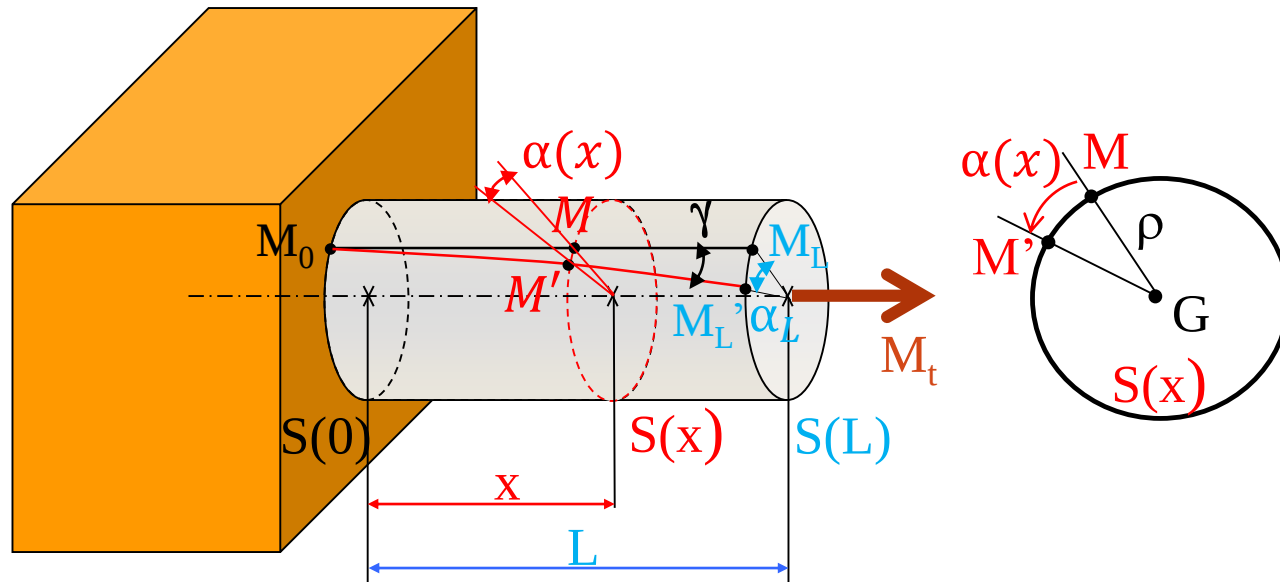


Soit une poutre circulaire pleine, parfaitement encastree en $S(0)$ (section de référence), soumise à l'extrémité $S(L)$ à un moment de torsion M_t .

Après déformation, On observe que :

- Une génératrice M_0M_L devient une hélice $M_0M'_L$ d'angle γ
- Chaque section droite $S(x)$ subit une rotation $\alpha(x)$ proportionnelle à sa distance x à la base $S(0)$:

$$\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{\alpha_L}{L} = cte = \theta$$



γ est l'angle de glissement ou distorsion (rad).

α est l'angle de torsion de $S(x)/S(0)$.

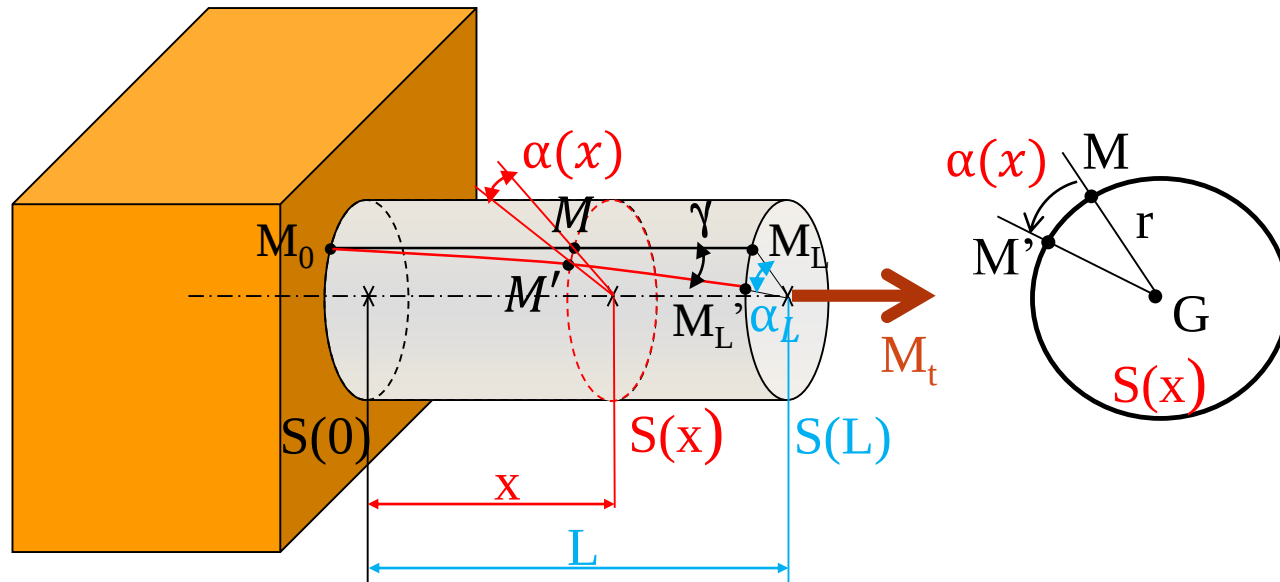
θ est l'angle unitaire de torsion (rad/mm).

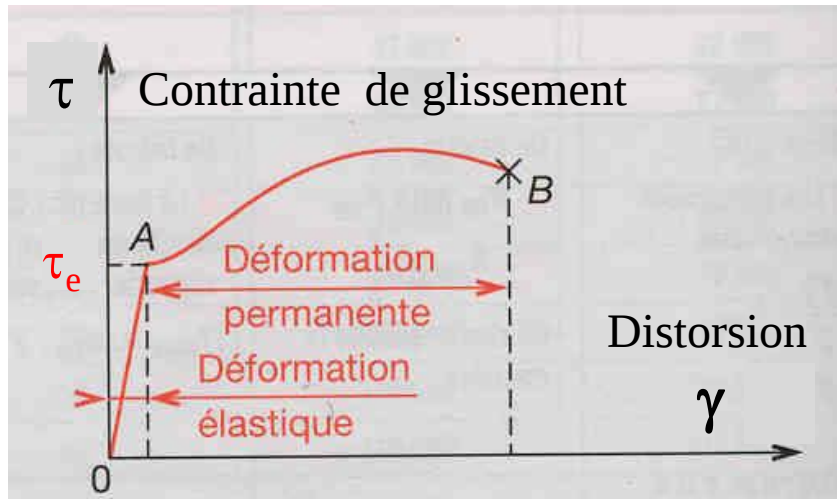
x est la distance entre $S(x)$ et $S(0)$ (mm)

La distorsion γ (HPD) est égale à :

$$\gamma = \frac{r\alpha}{x} = r\theta$$

$$\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{\alpha_L}{L} = cte = \theta$$



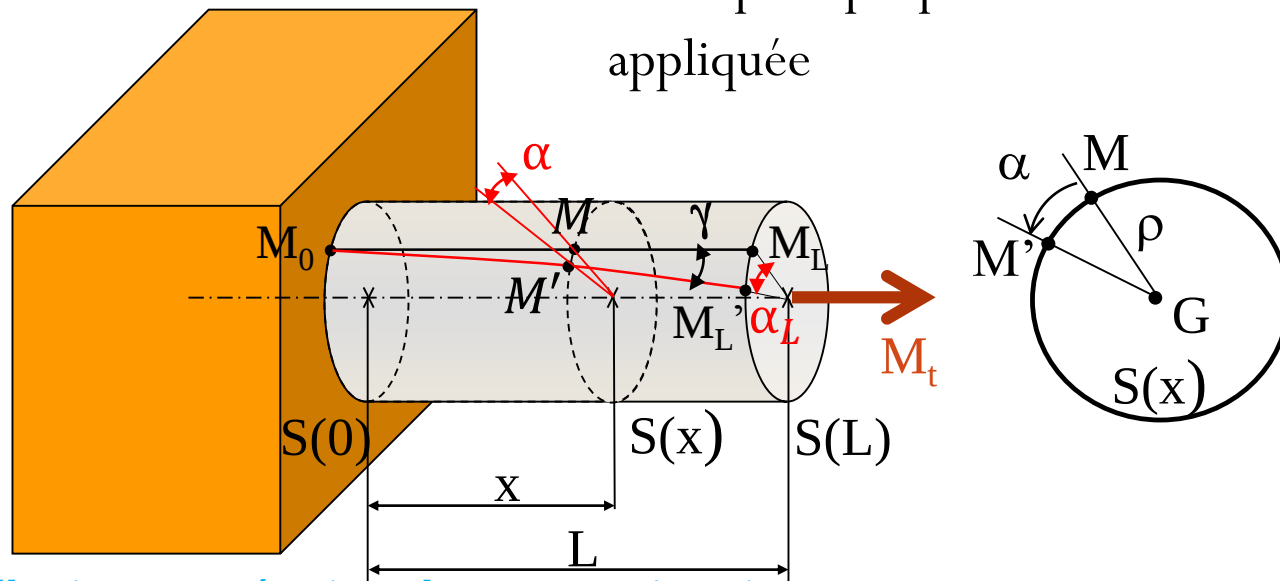


➤ OA : domaine élastique, la distorsion γ est proportionnelle à la contrainte appliquée $\tau = G \gamma$

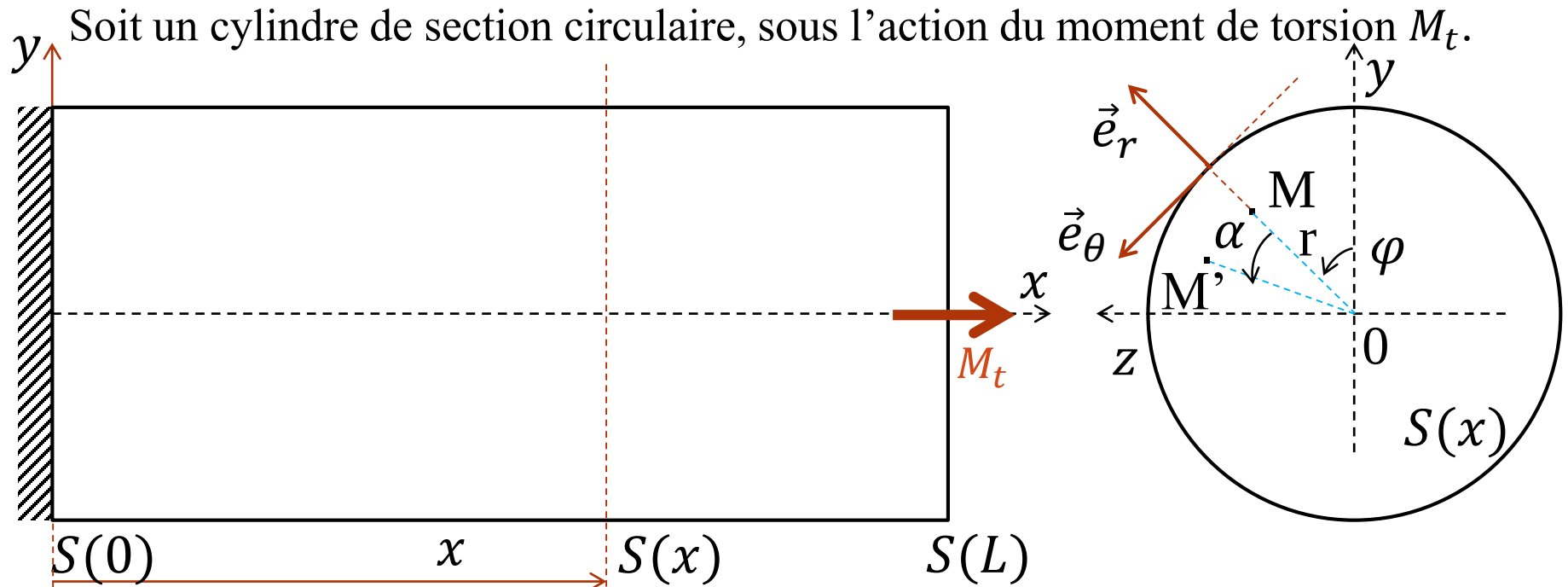
G : module de Coulomb

τ_e ou R_g : limite élastique au cisaillement ou au glissement.

➤ AB : domaine plastique, la distorsion γ n'est plus proportionnelle à la contrainte appliquée



3. Champ de déplacements



La section droite $S(x)$ subit une rotation α : $\alpha = \theta x$

Le point $M(r, \varphi)$ de $S(x)$ Après déformation $\rightarrow$ $M'(r, \varphi + \theta x)$

Le vecteur déplacement est : $\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = r \alpha \vec{e}_\theta = r \theta x \vec{e}_\theta$

On postule alors un champ de déplacement de la forme : $\vec{u} = r \theta x \vec{e}_\theta$

Avec : $r \vec{e}_\theta = r(-\sin\varphi \vec{y} + \cos\varphi \vec{z}) = -z\vec{y} + y\vec{z}$

$\rightarrow \vec{u} = r\theta x \vec{e}_\theta = \theta x(-z\vec{y} + y\vec{z})$

4. Contrainte tangentielle

Déformations

Sont obtenues en dérivant les déplacements :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Contraintes

Sont obtenues par les lois de comportement

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} 0 & -G\theta z & G\theta y \\ -G\theta z & 0 & 0 \\ G\theta y & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y,z}$$

Équations d'équilibre

Ce champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre.

Conditions aux limites

Sur la surface latérale : libre en contraintes de facette $\vec{n}$:

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \left(\frac{y}{R} \vec{y} + \frac{z}{R} \vec{z} \right) \quad \longrightarrow \quad \vec{T}(M, \vec{e}_r) = \bar{\bar{\sigma}} \vec{e}_r = \vec{0}$$

Sur la section droite : facette $\vec{x}$: $\vec{T}(M, \vec{x}) = \bar{\bar{\sigma}} \vec{x} = \vec{\tau} = G\theta(-z\vec{y} + y\vec{z}) = G\theta r \vec{e}_\theta$

Efforts intérieurs :

$$N = T_y = T_z = M_{f_y} = M_{f_z} = 0 \quad \Bigg| \quad M_t = G\theta \int_S (y^2 + z^2) ds = G\theta \int_S r^2 ds = G\theta I_G$$

$$\longrightarrow \quad \vec{R} = \vec{0} \quad \boxed{\vec{M}_G = M_t \vec{x} = G\theta I_G \vec{x}}$$

Contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{M_t}{I_G} r$$

Ou encore

$$\tau = \frac{M_t}{\left(\frac{I_G}{r} \right)}$$

4. Contrainte tangentielle

$$\tau = \frac{M_t}{I_G} r$$

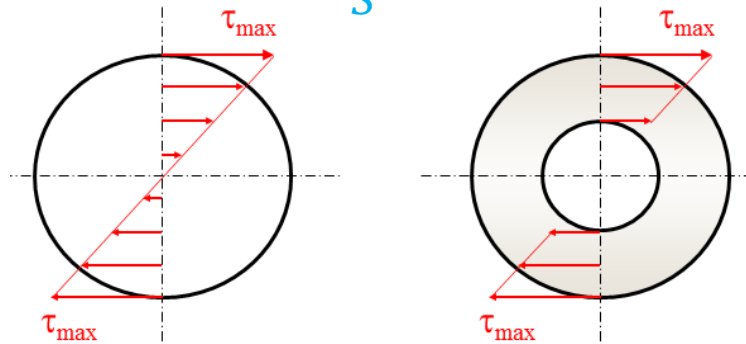
Remarques :

La contrainte tangentielle τ est une fonction linéaire du rayon r . Elle est nulle sur la ligne moyenne ($r=0$) et maximale pour $r = R$ et vaut :

$$\tau_{Maxi} = \frac{M_t}{\left(\frac{I_G}{R}\right)}$$

I_G est le moment polaire de la section (S) par rapport à G (mm^4) et (I_G/R) est le module de torsion (mm^3) avec :

$$I_G = \int_S r^2 ds$$



5. Déformations

D'après le torseur des taux de déformations, la déformation de torsion θ s'écrit :

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}$$

Or :

$$\theta = \frac{\tau}{Gr} \quad \rightarrow \quad \theta = \frac{M_t}{GI_G}$$
$$\alpha = \theta x \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{M_t}{GI_G} x$$

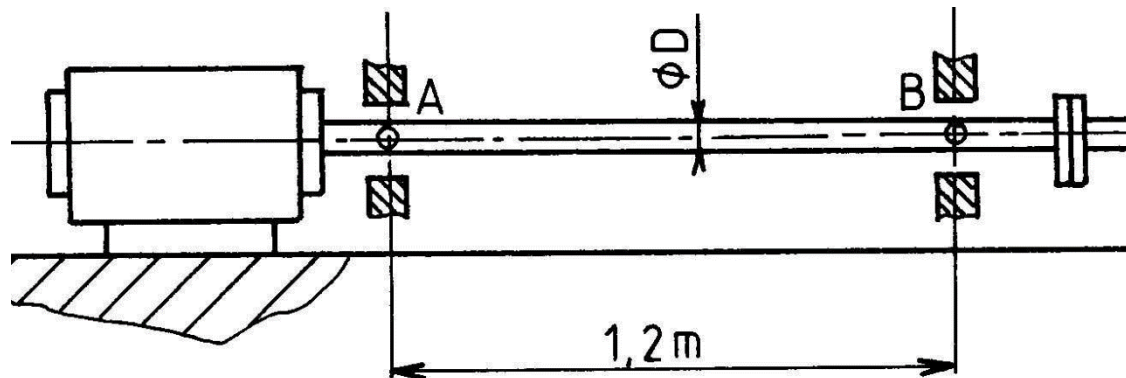
Un arbre AB de longueur 1.2 m, de section cylindrique constante, doit transmettre une puissance P de 24 KW d'un moteur électrique à un manchon d'accouplement avec une fréquence de rotation n de 1 600 tr/min. On donne :

CORRIGE

$$R_e = 390 \text{ MPa} \quad R_{eg} = \frac{R_e}{2} \quad s = 5 \quad G = 80\,000 \text{ MPa}$$

1. Calculer le diamètre d de l'arbre. $d \geq 26.54$ On prend : $d = 27$
2. Calculer l'angle unitaire de torsion puis déduire l'angle de torsion.

$$\theta = 0.00196 \text{ degré/mm} \quad \alpha = 2.35 \text{ degré}$$



Soit deux arbres de transmission construits à partir du même acier
 $G = 80.000 \text{ Mpa}$.

Le premier arbre est plein et de diamètre d

Le second arbre est creux et de diamètres D et $d' = 0,6 D$.

Le couple à transmettre est de 400 Nm , la résistance pratique au cisaillement adoptée pour les deux cas est de 80 Mpa .

1. Calculer le diamètre d de l'arbre plein et la rotation relative entre deux sections distantes de 300 mm .
2. Calculer le diamètre D et d' de l'arbre creux et la rotation relative entre les mêmes sections distantes de 300 mm .
3. Déterminer le rapport k de leur masses puis conclure.