



Le centre régional des métiers de l'éducation et de  
la formation  
Casablanca-Settat

**Polycopie du cours**  
**Complément de formation 1**  
**Géométrie plane – Ltes**  
**transformations ponctuelles**

**Préparé par :**  
**Pr. Sbaa Mohammed**

**Année de formation**  
**2018-2019**

## Table des matières

|                                                                                        |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Chapitre 1 : Généralités sur les transformations ponctuelles.</b>                   | 4  |
| 1.1. Vocabulaire :                                                                     | 4  |
| 1.2. Définitions :                                                                     | 4  |
| 1.3. Applications -Théorèmes et propriétés.                                            | 4  |
| <b>Chapitre 2 : Isométries.</b>                                                        | 5  |
| 2.1. Définition :                                                                      | 5  |
| 2.2. Propriétés :                                                                      | 5  |
| 2.3. Conclusion                                                                        | 6  |
| <b>Chapitre 3 : Translation</b>                                                        | 6  |
| 3.1. Définition :                                                                      | 6  |
| 3.2. Propriétés :                                                                      | 6  |
| 3.3. Expression analytique d'une translation de vecteur $V(a; b)$                      | 7  |
| 3.4. Expression complexe d'une translation de vecteur $V(a; b)$                        | 8  |
| 3.5 Exercices d'applications                                                           | 8  |
| 3.6. Produit de deux translations $T_1$ et $T_2$                                       | 8  |
| <b>Chapitre 4 : Les Rotations</b>                                                      | 8  |
| 4.1. Définition :                                                                      | 8  |
| 4.2. Applications                                                                      | 8  |
| 4.3. Propriétés :                                                                      | 9  |
| 4.4. Exercice :                                                                        | 11 |
| 4.5. Expression complexe d'une rotation $R(O; \alpha)$                                 | 11 |
| 4.5. Exercices d'application :                                                         | 11 |
| 4.6. Construction du centre de rotation                                                | 12 |
| 4.7. Produit de deux rotations.                                                        | 12 |
| 4.8. Produit translation avec rotation : $R \circ T$ avec $R=R(O; \alpha)$ et $T = TV$ | 13 |
| <b>Chapitre 5 : Symétrie centrale et réflexion ou symétrie axiale</b>                  | 14 |
| 5.1. Symétrie centrale                                                                 | 14 |
| 5.1.1. Définition                                                                      | 14 |
| 5.1.2. Propriétés :                                                                    | 14 |
| 5.1.3. Expression complexe de symétrie centrale de centre $w$                          | 14 |

|                                                                         |    |
|-------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.2. Réflexion ou symétrie axiale $S(\Delta)$ .....                     | 15 |
| 5.2.1. Définition : .....                                               | 15 |
| 5.2.2. Propriétés : .....                                               | 15 |
| 5.2.3. Expression complexe de symétrie axiale par rapport $(xx')$ ..... | 16 |
| 5.2.4. Expression complexe de symétrie axiale par rapport $(yy')$ ..... | 16 |
| 5.2.5. Exercice d'application : .....                                   | 16 |
| Chapitre 6 : Homothétie .....                                           | 17 |
| 6.1. Définitions et propriétés : .....                                  | 17 |
| 6.2. Expression complexe d'une homothétie .....                         | 18 |
| 6.3. Produit deux homothéties : $H_2$ et $H_1$ .....                    | 20 |
| Chapitre 8 : Similitude direct plane .....                              | 22 |
| 8.1. Définitions : .....                                                | 22 |
| 8.2. Expression complexe de $S(W, k, \theta)$ directe .....             | 25 |
| Chapitre 9 : Les inversions .....                                       | 26 |
| 9.1. Définition : .....                                                 | 26 |
| 9.2. Théorèmes : .....                                                  | 26 |
| 9.3. Expression complexe de $I(O, k)$ .....                             | 28 |
| 9.4. Expression analytique .....                                        | 28 |

## Chapitre 1 : Généralités sur les transformations ponctuelles.

### 1.1. Vocabulaire :

- Lorsque dans le plan, à chaque point M on associe un unique point M', on dit que l'on a défini une application du plan dans lui-même
- Dire qu'une application T est bijective signifie que tout point M est l'image par T d'un point M et un seul

### 1.2. Définitions :

#### Définition1 :

Une application bijective est une transformation

$$\begin{array}{ccc} T : E & \longrightarrow & E \\ M & \longrightarrow & T(M) = M' \end{array}$$

M' est l'image de M ou homologue de M ou transformé de M par T

M est l'Antécédent de M'

#### Définition2 :

M est dit point double ou invariant lorsque  $T(M) = M$

### 1.3. Applications -Théorèmes et propriétés.

#### Application 1 :

Soit  $T : M(x, y) \longrightarrow M'(x', y')$  ; tel que :

$$M' = T(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = 2x - y + 3 \end{cases}$$

- 1) Soit A (1 ;2) déterminer l'image A' de A par T.
- 2) Déterminer les points doubles de T.

#### Application 2

Soit  $f : M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$  tel que :  $M' = f(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = 2x + y - 1 \\ y' = x - y + 2 \end{cases}$

f admet-elle une fonction réciproque  $f^{-1}$  ?

#### Application 3

Soit  $f : M \rightarrow M' = f(M)$  tel que :  $z' = \frac{i(z-1)}{z+1}$  où z d'affixe de M et z' d'affixe de M'  
Déterminer la fonction réciproque  $f^{-1}$ .

**Définition :**

Soit F une figure. Si  $T(F) = F$  il y a deux cas :

- 1) F est une figure invariante point par point (Si chaque point M de F est double)
- 2) F globalement invariante (s'il existe un point de F qui n'est pas double)

**Théorème :**

Le produit de transformation est associatif cà-d :  $T_3 \circ (T_2 \circ T_1) = (T_3 \circ T_2) \circ T_1$

**Définition :**

T est involutive  $\Leftrightarrow T$  est une bijective et  $T = T^{-1}$

**Propriétés :**

1.  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$
2. Si f est involutive, alors :  $f \circ f = id$

**Application 4**

Soit  $f : M(x, y) \rightarrow M'(x', y')$  tel que :

$$M' = T(M) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

- 1) Déterminer les points doubles de f.
- 2) Déterminer la fonction réciproque  $f^{-1}$ , f est-elle involutive ?
- 3) Soit (D) :  $y = x + 1$ . Déterminer l'image de (D) par f

## Chapitre 2 : Isométries

**2.1. Définition :**

On appelle isométrie toute application qui conserve les distances.

**2.2. Propriétés :**

1. Une isométrie transforme trois points alignés A, B et C en trois points alignés dans le même ordre.
2. Si  $AB = K AC$  alors  $A'B' = K A'C'$
3. Si  $AB = CD$  alors  $A'B' = C'D'$
4. Si  $AB = k.CD$  alors  $A'B' = kC'D'$
5. Si  $AB + CD = EF$  alors  $A'B' + C'D' = E'F'$  «  $U + V = W \Rightarrow U' + V' = W'$  »
6. Si  $\alpha GA + \beta GB + \delta GC = 0$  alors  $\alpha G'A' + \beta G'B' + \delta G'C' = 0$
7. L'écriture complexe d'une isométrie est :  
 $Z' = az + b$  ou  $z' = a\bar{z} + b$  avec  $a = e^{i\theta}$  ( $|a| = 1$ ) et b complexe
8. Soit T est une isométrie, si T admet trois points invariants Non alignés alors  $T = id$

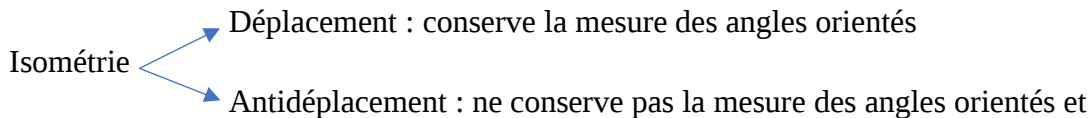
### Démonstrations

Pt<sup>é</sup> 8 :  $T(A)=A$  ;  $T(B)=B$  et  $T(C)=C$  si  $T$  n'est pas identique Il existe un point  $M$  Tel que  $M' \neq M$ , alors  $[MM']$  est un segment. Mais  $AM=A'M'=AM'$ , alors  $A$  est sur la médiatrice du segment  $[MM']$ . De même pour  $B$  et  $C$  donc les points sont alignés, c'est impossible. Donc, Si  $T$  n'est pas identique alors tous les points invariants sont alignés.

### 2.3. Conclusion

Les isométries conservent :

- 1) Les milieux
- 2) L'alignement
- 3) Le parallélisme
- 4) Les mesures des angles algébriques
- 5) Les aires et les barycentres



## Chapitre 3 : Translation

### 3.1. Définition :

La translation du vecteur  $\vec{V}$  est une application définie par :

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}$$

**Attention** : si  $\vec{V} = \vec{0}$  alors la translation  $T = \text{id}$

**Remarque** : si  $\vec{V} \neq \vec{0}$  la translation n'admet aucun point double (invariant)

### 3.2. Propriétés :

1. P1 : La translation du vecteur  $\vec{V}$  admet une réciproque  $T^{-1}$ 

$$\begin{array}{ccc} T : E & \longrightarrow & E \\ M & \longrightarrow & T(M) = M' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T^{-1} : E & \longrightarrow & E \\ M' & \longrightarrow & T^{-1}(M') = M \end{array}$$

$T^{-1}$  est une translation du vecteur  $-\vec{V}$
2. P2 : Une transformation est une translation si et seulement si la relation  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$  est toujours vraie pour tous les points

### Démonstrations :

1. Toujours pour déterminer la transformation inverse Il faut exprimer  $M$  en fonction de  $M'$

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{V} \Leftrightarrow \overrightarrow{M'M} = -\vec{V}$$

## 2. Condition nécessaire

**Par hypothèse** : T est une translation

**Conclusion** :  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$  est toujours vrai pour tous les points En effet :  $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$  et  $\overrightarrow{NN'} = \vec{V}$  alors  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'}$  donc MM'N'N est un parallélogramme, par suite  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$

### Condition suffisante :

**Par hypothèse** :  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$  est toujours vrai pour tous les points

**Conclusion** : T est une translation

En effet : T (M)=M' et O est un point fixe, T (O) = O' alors  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'O'}$

Donc MOM'O' est un parallélogramme, par suite  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$

Alors T est une translation du vecteur  $\overrightarrow{OO'}$

### Corollaires

- a. La translation est une isométrie
- b. La translation conserve
  - 1) Les milieux
  - 2) L'alignement
  - 3) Le parallélisme
  - 4) Les mesures des angles algébriques et les mesures des angles orientés
  - 5) Les aires et les barycentres

### Propriété 3

- 1) L'image d'une droite (D), par une translation du vecteur  $\vec{V}$  (avec  $(\vec{D})$  non // à  $\vec{V}$ ) est une droite (D') // (D)
- 2) Si  $\vec{D}$  // à  $\vec{V}$ , alors la droite (D) est globalement invariante par T.
- 3) L'image d'un cercle (C) de centre I et de rayon R, par T est un cercle (C') de centre I'=T(I) et de rayon R
- 4) L'image d'un triangle est un triangle. De même nature
- 5) L'image d'un segment est un segment. De même longueur
- 6) Si I est le milieu de [AB], alors I' est le milieu de [A'B'].

### 3.3. Expression analytique d'une translation de vecteur $\vec{V}$ (a ; b)

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

### 3.4. Expression complexe d'une translation de vecteur $\vec{V}(a; b)$

$$Z_{M'} - Z_M = Z_V \text{ Donc } Z_{M'} = Z_M + Z_V \Leftrightarrow$$

D'où  $Z' = Z + c$  où  $c$  est un nombre complexe où  $c = Z_V$

### 3.5 Exercices d'applications

#### Exercice 1 :

Soit  $T$  une translation du vecteur  $\vec{V}(-1; 2)$

- 1) Déterminer l'expression analytique de  $T$ .
- 2) Déterminer l'expression complexe de  $T$ .

#### Exercice 2

Soit  $f : M \rightarrow M' = f(M)$  tel que :  $z' = z + 2 - 3i$  où  $z$  d'affixe de  $M$  et  $z'$  d'affixe de  $M'$   
Déterminer la nature de  $f$ .

### 3.6. Produit de deux translations $T_1$ et $T_2$

#### Propriété 4

Le produit  $T_2 \circ T_1$  de deux translations  $T_1$  et  $T_2$  ; est une translation du vecteur  $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$

**Remarque :**  $T_2 \circ T_1 = T_1 \circ T_2$

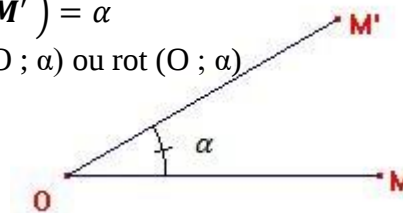
## Chapitre 4 : Les Rotations

### 4.1. Définition :

La rotation est une transformation  $R$  qui à chaque point  $M$  associe le point  $M'$  tel que :

$$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$

$R$  s'appelle rotation de centre  $O$  et d'angle  $\alpha$ , notée par  $R(O; \alpha)$  ou  $\text{rot}(O; \alpha)$



### 4.2. Applications

#### Application 1

- 1) Soit  $R = \text{rot}(A, \frac{\pi}{6})$  construire  $r(B)$
- 2) Soit  $R' = \text{rot}(B, -\frac{\pi}{6})$  construire  $r'(A)$



### 4.3. Propriétés :

#### Propriété 1

La rotation admet une réciproque  $R^{-1}(O ; -\alpha)$

Remarque : la rotation  $r$  est non involutive si  $\alpha \neq \pm\pi$  ou  $\alpha \neq 0$

#### Propriété 2

Si  $\alpha \neq 0$  le centre est le seul point double (invariant)

Preuve : (par l'absurde)

$OM = OM'$

Si non il existe un point double  $M$  autre que  $O$  alors  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$

Donc  $\alpha = 0$  par suite la contradiction ne peut être levée que si  $M \equiv O$

Attention :  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$

$$\begin{aligned} \text{Car } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) &= (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) + (\overrightarrow{ON'}, \overrightarrow{ON}) \\ &= \alpha + (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) - \alpha \\ &= (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'}) \end{aligned}$$

#### Propriété 3

La transformation est une rotation  $\Leftrightarrow \begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha \end{cases}$

Preuve

Condition nécessaire

Par hypothèse :  $R$  est une rotation

Conclusion :  $MN = M'N'$  et  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$

En effet :

Les deux triangles  $OMN$  et  $OM'N'$  sont égaux d'après le cas Côté – angle – côté

$OM = OM'$ ,  $ON = ON'$  et  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$

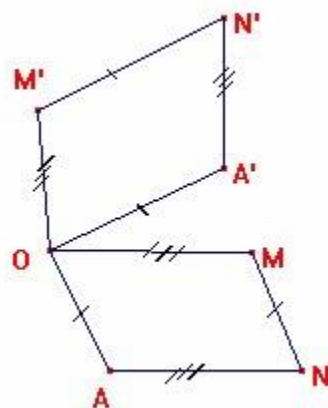
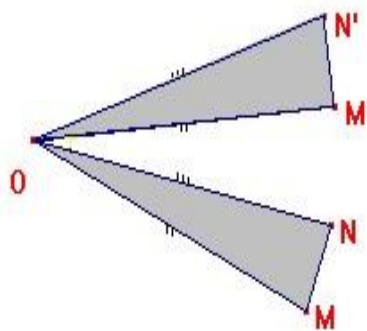
D'après les éléments homologues  $MN = M'N'$ .

$(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha??$

En effet :

Soit  $A$  un point tel que  $OMNA$  est un parallélogramme et  $A' = R(A)$ , puisque  $MN = M'N'$  est vrai pour tous les points on peut déduire  $N'A' = NA = OM = OM'$  et  $M'N' = MN = OA = OA'$

Donc  $OM'N'A'$  est un parallélogramme



Par suite  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{OA'}$  et  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \alpha$

Condition suffisante :

**Par hypothèse :**  $MN = M'N'$  et  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$  « Transformation f »

Est toujours vrai pour tous les points

**Conclusion**

La transformation est-elle une rotation ?

Cette transformation est une rotation d'angle  $\alpha$ , et le centre O n'est point d'intersection de la médiatrice de  $[MM']$  avec l'arc capable d'où l'on voit ce segment sous l'angle  $\alpha$

**En effet :**

On considère un point M point fixe et M' l'image de M par f ( $M' = f(M)$ )

**On désigne par N' l'image de N par f. et N'' l'image de N par R (O ;  $\alpha$ ), On va démontrer que  $N' = N''$ .**

Puisque O un point de la médiatrice de  $[MM']$  on peut écrire  $OM = OM'$

Puisque O un point de l'arc capable d'où l'on voit ce segment sous l'angle  $\alpha$ , on peut écrire  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$  alors  $M' = R(M)$

$$\text{Donc } \begin{cases} R(M) = M' \\ R(N) = N'' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN = M'N'' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N''}) = \alpha \end{cases} \text{ en comparant}$$

Avec la définition de la transformation f

On démontre que  $M'N' = M'N''$  et  $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'N''}$ ,

$$(\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'N''}) = (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N''}) = 0$$

Alors  $N'' = N'$

D'après ça N' est un homologue de N par cette rotation

R (O ;  $\alpha$ )

**Corollaire 1 :**

La rotation est une isométrie.

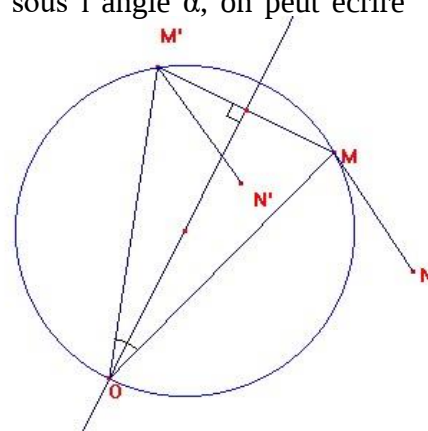
**Preuve**

$R(M) = M'$  et  $R(N) = N'$  alors  $MN = M'N'$

**Corollaire 2**

La rotation conserve

- 1) Les milieux
- 2) L'alignement
- 3) Le parallélisme
- 4) Les mesures des angles algébriques et les mesures des angles orientés
- 5) Les aires et les barycentres
- 6) L'équipollence
- 7) La tangence



#### 4.4. Exercice :

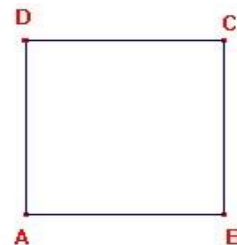
##### Application 2

Soit ABCD est un carré, M un point de [AB] et N un point de [BC] Tel que  $AM = CN$ .

Montrer qu'il existe une rotation  $r$  qui transforme M en N.

Dont on déterminera le centre et l'angle.

Éléments de réponses :  $r(B, -\frac{\pi}{2})$



#### 4.5. Expression complexe d'une rotation $R(O; \alpha)$

$$M(z), M'(z') \text{ et } O(z_0) \text{ et } R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha \end{cases}$$

$$OM = OM' \Leftrightarrow \frac{OM}{OM'} = 1 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right| = 1$$

$$\text{Arg} \left( \frac{z - z_0}{z' - z_0} \right) = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha + 2k\pi \text{ par suite } \frac{z - z_0}{z' - z_0} = [1; \alpha] = e^{i\alpha}$$

Donc on peut écrire :  $z' = az + b$  avec  $z_0 = \frac{b}{1-a}$  et  $a = [1; \alpha] = e^{i\alpha}$

Deuxième forme :  $z' - z_0 = e^{i\alpha}(z - z_0)$

**Remarque** : si  $z' = az + b$  alors  $z_0 = \frac{b}{1-a}$  est l'abscisse du point double Par suite  $z_0$  est l'abscisse du centre.

#### 4.5. Exercices d'application :

##### Application 3

Soit Application 3  $f : M \rightarrow M' = f(M)$  tel que :  $z' = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$

Quelle est la nature de cette transformation ? puis déterminer le centre et l'angle.

##### Application 4

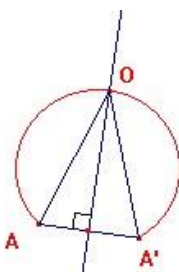
1) Déterminer l'expression complexe de  $r = \text{rot}(A, \frac{\pi}{6})$  avec  $A(0,1)$

2) Dédurre l'expression analytique.

#### 4.6. Construction du centre de rotation

Premier cas : si connaissant l'angle  $\alpha$  et un point fixe A et son image

Méthode : alors le centre O est l'intersection de la médiatrice de  $[AA']$ . Avec l'arc capable d'où l'on voit  $[AA']$  sous l'angle  $\alpha$



Deuxième cas :

Si connaissant deux couples  $(A ; A')$  et  $(B ; B')$  avec  $R(A) = A'$  et  $R(B) = B'$

Il y a deux cas : a)  $(AA')$  n'est pas parallèles à  $(BB')$

b)  $(AA') \parallel (BB')$

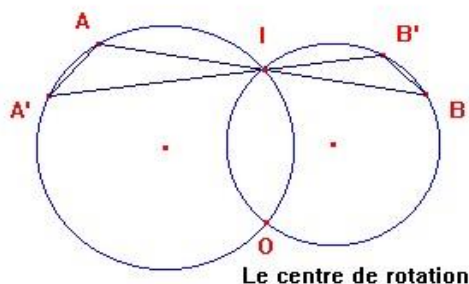
**a) Si  $(AA')$  n'est pas parallèles à  $(BB')$**

$((AB) ; (A'B')) = \alpha$ . Soit I est l'intersection de  $(AB)$  avec  $(A'B')$  Donc  $\angle AIA' = \angle BIB' = \alpha$  (opposés par le sommet)

On trace deux cercles passant par  $AIA'$  et  $BIB'$ , Mais le centre O se trouve

Sur l'arc capable d'où l'on voit  $[AA']$  sous l'angle  $\alpha$  et sur l'arc capable d'où l'on voit  $[BB']$  sous l'angle  $\alpha$ , alors le centre O est l'intersection

De deux cercles



**b) si  $(AA') \parallel (BB')$**  : alors  $I \equiv O$  est le centre

#### 4.7. Produit de deux rotations

$R_1(O_1; \alpha_1)$  et  $R_2(O_2; \alpha_2)$ .  $R_1(M) = M_1$  ;  $R_2(M_1) = M'$  ;  $R_1(N) = N_1$  ;  $R_2(N_1) = N'$

et  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) = \alpha_1$

$M_1N_1 = M'N'$  et  $(\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha_2$

Par comparaison  $MN = M_1N_1 = M'N'$

$$\text{Et } (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M_1N_1}) + (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha_1 + \alpha_2$$

$$\text{Alors : } \begin{cases} MN = M'N' \\ (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

Premier cas : si  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$  alors  $R_2 \circ R_1$  est une translation

Il y a deux cas a)  $O_1 = O_2$  alors  $R_2 \circ R_1$  est une translation identique

b)  $O_1 \neq O_2$  alors est une translation de vecteur  $O_1O'$  avec  $O' = R_2(O_1)$

**Attention :**  $R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$  n'est **pas commutative**

Deuxième cas : si  $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$

Alors :  $R_2 \circ R_1$  est une rotation d'angle  $\alpha_1 + \alpha_2$  il y a deux cas

a)  $O_1 \equiv O_2$

b)  $O_1 \neq O_2$

a) si  $O_1 \equiv O_2$  alors  $R_2 \circ R_1(O_1) = R_2(R_1(O_1)) = R_2(O_1) = R_2(O_2) = O_2 = O_1$

Donc  $O_1$  est un point double par  $R_2 \circ R_1$  alors  $O_1$  est Le centre de rotation

Attention : si  $O_1 \equiv O_2$  alors  $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$  donc commutative

b) si  $O_1 \neq O_2$  ; Alors  $R_2 \circ R_1$  est une rotation d'angle  $\alpha_1 + \alpha_2$  Et de centre w

Puisque w est le centre de rotation  $R_2 \circ R_1$  alors il est un point double

Donc  $R_2 \circ R_1(w) = w$ , on pose  $R_1(w) = w'$  par suite  $R_2(w') = w$

$$\begin{cases} R_1(w) = w' \\ R_2(w') = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O_1w' = O_1w \text{ et } O_2w = O_2w' \\ (\overrightarrow{O_1w}, \overrightarrow{O_1w'}) = \alpha_1 \text{ et } (\overrightarrow{O_2w'}, \overrightarrow{O_2w}) = \alpha_2 \end{cases}$$

Alors  $(O_1O_2)$  est la médiatrice du  $[ww']$  Construction :

**Centre de  $R_2 \circ R_1$**

### 2<sup>ème</sup> méthode complexe

$R_1(O_1; \alpha_1)$  et  $R_2(O_2; \alpha_2)$

$R_1$  pour écriture complexe  $z' = e^{i\theta_1}z + b_1$  et  $R_2$  pour écriture complexe  $z' = e^{i\theta_2}z + b_2$ .

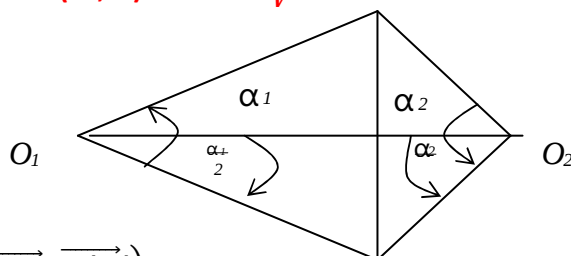
Alors  $R_2 \circ R_1$  pour écriture complexe  $z' = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}z + e^{i\theta_2}b_1 + b_2$ .

Donc  $R_2 \circ R_1$  a une écriture complexe de la forme  $z' = az + b$  avec  $|a| = 1$  c'est donc rotation ou une translation (Selon la valeur de  $\theta_1 + \theta_2 = 0$  ou  $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ ).

#### **4.8. Produit translation avec rotation : $R \circ T$ avec $R = R(O; \alpha)$ et $T = T_{\vec{v}}$**

$$T_{\vec{v}}(M) = M_1 \text{ et } R(M_1) = M'$$

$$T_{\vec{v}}(N) = N_1 \text{ et } R(N_1) = N'$$



$$\text{Alors : } \overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{MN}, \quad M_1N_1 = M'N' \text{ et } (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$$

Par suite  $MN = M'N'$  et  $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \alpha$

**Donc  $R \circ T$  est une rotation d'angle  $\alpha$  et de centre  $w$  à déterminer**

Puisque  $w$  est le centre de rotation  $R \circ T$  alors il est un point double. Alors  $R \circ T(w) = w$ . On pose  $T_{\vec{V}}(w) = w'$ . On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \overrightarrow{ww'} = \vec{V} \\ Ow' = Ow \text{ et } (\overrightarrow{Ow}, \overrightarrow{Ow'}) = \alpha \text{ car : } R \circ T(w) = w \Leftrightarrow R(w') = w \end{cases}$$

### Construction de $w$ ?

**1<sup>ère</sup> étape :** tracer  $x'ox \perp \vec{V}$ , puis une droite  $y'oy$  fait avec  $x'ox$  un angle  $\frac{\alpha}{2}$

**2<sup>ème</sup> étape :** tracer  $z'z$  homologue de  $x'ox$  par translation du vecteur  $-\frac{1}{2} \vec{V}$

Alors  $w = y'oy \cap z'z$ .

### 2<sup>ème</sup> méthode complexe

$R$  pour écriture complexe  $z' = e^{i\theta} z + b_1$   $T$  pour écriture complexe  $z' = z + b_2$ .

Donc  $R \circ T$  a pour écriture complexe  $z' = e^{i\theta} z + b_1 + e^{i\theta} b_2$

Alors  $R \circ T$  est une rotation d'angle  $\theta$ .

### Remarque

$R \circ T \neq T \circ R$  donc le produit la rotation avec la translation n'est pas commutative

## Chapitre 5 : Symétrie centrale et réflexion ou symétrie axiale

### 5.1. Symétrie centrale

#### 5.1.1. Définition

Soit  $w$  un point fixe,  $M$  est un point variable, on appelle symétrie de centre  $w$  la transformation  $f$  qui transforme  $M \rightarrow M'$  tel que  $w$  est le milieu de  $[MM']$ ,

On note :  $f = S_w$

#### 5.1.2. Propriétés :

##### Propriétés 1

- 1) Si  $w \in (D)$  alors  $S_w(D) = (D)$
- 2) Si  $w \notin (D)$  alors  $S_w(D) = (D') \parallel (D)$
- 3) L'image d'un cercle de centre  $I$  et de rayon  $R$  par  $S_w$  est un cercle de centre  $I' = S_w(I)$  et de rayon  $R' = R$ .

#### 5.1.3. Expression complexe de symétrie centrale de centre $w$

$w$  est le centre alors  $w$  est le milieu de  $[MM']$  donc :  $z_w = \frac{z' + z}{2} \Leftrightarrow z' = -z + 2z_w$

Alors sous la forme  $z' = az + b$  avec  $a = -1$  et  $z_w = \frac{b}{2}$

**Cas particulier :** si  $w \equiv O$  l'expression complexe est  $Z' = -Z$

### Application

On donne  $w(1,1)$

Déterminer l'expression complexe de symétrie centrale de centre  $w$ .

## 5.2. Réflexion ou symétrie axiale $S(\Delta)$

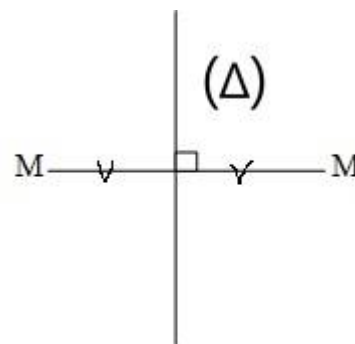
### 5.2.1. Définition :

$(\Delta)$  Est une droite, on appelle réflexion d'axe  $(\Delta)$

L'application qui à tout point  $M$  du plan associe le point  $M'$  symétrique de  $M$  par rapport à  $(\Delta)$

### Remarque

Réflexion d'axe  $(\Delta)$  s'appelle symétrie axiale où  
Symétrie orthogonale d'axe  $(\Delta)$



### 5.2.2. Propriétés :

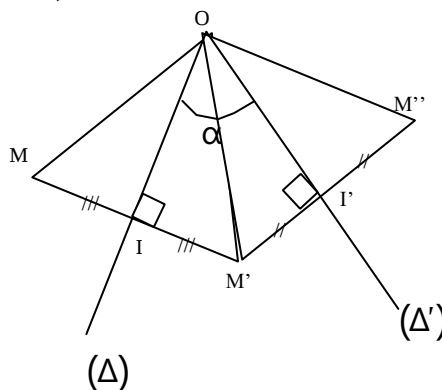
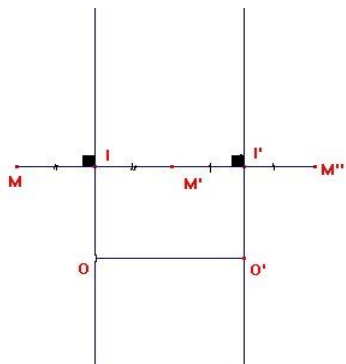
- 1) Toute réflexion est une isométrie
- 2) Si  $M \in (\Delta)$  alors  $M \equiv M'$  donc  $M$  est un point double
- 3) Si  $(d) \perp (\Delta)$  alors  $S_{(\Delta)}(d) = (d)$
- 4) Si  $S_{(\Delta)}(A) = (A')$ ,  $S_{(\Delta)}(B) = (B')$  et  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $(\Delta)$
- 5) Une réflexion change le signe des mesures angles orientés
 
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{AB}) \quad [2\pi] \text{ (Preuve propriété 4)}$$
- 6) a) si  $(d) \parallel (\Delta)$  alors  $S_{(\Delta)}(d) = (d')$  est parallèle à  $(d)$   
 b) si  $(d)$  coupe  $(\Delta)$  alors  $(d)$  coupe  $(d')$
- 7)  $S_{(\Delta)}(\text{cercle}) = \text{cercle de même rayon}$
- 8)  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta)} = \text{id}$
- 9)  $S_{(\Delta)} = S_{(\Delta)}^{-1}$  donc  $S_{(\Delta)}$  bijective et involutive
- 10)  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  est une translation si  $(\Delta) \parallel (\Delta')$
- 11)  $S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')}$  est une rotation si  $(\Delta)$  coupe  $(\Delta')$

**Preuve 10)** on prend un point  $O$  de  $(\Delta)$  et  $O'$  un point de  $(\Delta')$  Tel que  $(OO') \perp (\Delta)$ , Mais  $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{IM'}$  et  $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'I'}$ . Donc  $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{II''} = 2\overrightarrow{OO'}$ . Par suite :

$$S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = T_{2\overrightarrow{OO'}}$$

**Preuve 11)**

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'}) = \alpha ; \text{ alors } S_{(\Delta')} \circ S_{(\Delta)} = R(O; 2\alpha)$$



**Remarque 1 :** la composition des réflexions n'est pas commutative

$$\text{Car } S_{(\Delta)} \circ S_{(\Delta')} = R(O; -2\alpha) \text{ où } (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI'}) = \alpha$$

**Remarque 2 :** réciproquement, on peut démontrer que toute rotation  $R$  ou toute translation  $T$ , peut s'écrire d'une infinité de façons comme la composée de deux réflexions  $S_d$  et  $S_{d'}$ .

$R = S_d \circ S_{d'}$  avec  $d$  et  $d'$  sécantes en  $O$ .

$T = S_d \circ S_{d'}$  avec  $d$  et  $d'$  parallèles, ayant le vecteur de  $T$  pour vecteur normal

### 5.2.3. Expression complexe de symétrie axiale par rapport $(xx')$

$$S_{(xx')} (M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases} \text{ alors } z' = \bar{z}$$

### 5.2.4. Expression complexe de symétrie axiale par rapport $(yy')$

$$S_{(yy')} (M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases} \text{ alors } z' = -\bar{z}$$

### 5.2.5. Exercice d'application :

Soit  $f: M \rightarrow M'$  tel que  $z' = -3\bar{z} + 3 - 2i$  quelle est la nature de  $f$  ?

### Éléments de réponses

$z \xrightarrow{g} z_1 \xrightarrow{h} z'$  Où  $g(z) = z_1 = z$  et  $h(z_1) = z' = -3z + 3 - 2i$

Alors  $g$  est une symétrie par rapport de  $(x'x)$  (réflexion d'axe  $(x'x)$ ), et  $h$

est une homothétie de centre  $w(\frac{3}{4}; -\frac{1}{2})$  et de rapport  $-3$ ,  $h(w, -3)$

Donc  $f = h \circ g =$  produit d'une symétrie par rapport  $(x'x)$  et d'une homothétie

## Chapitre 6 : Homothétie

### 6.1. Définitions et propriétés :

#### Définition

$H(O, k)$  Homothétie de centre  $O$  et de rapport  $k$

$$H(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

si  $k$  est un nombre positif alors l'homothétie est dite positive

si  $k$  est un nombre négatif alors l'homothétie est dite négative

si  $k = 1$  alors l'homothétie est une transformation identique

**Attention** si  $k \neq 1$  alors le centre est le seul point double

#### Remarque

Les trois points  $O$ ,  $M$  et  $M'$  sont alignés

#### Propriétés

1. si  $k = -1$  transformation est une symétrie par rapport à l'origine
2.  $H(O; k) \Leftrightarrow H^{-1}(O; \frac{1}{k})$   
si  $k \neq \pm 1$  alors  $H$  est non involutive
3. Une transformation est une homothétie  $\Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$  et ( $k \neq 0$  et  $1$ )

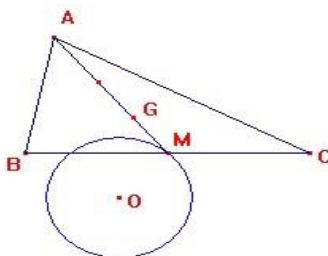
#### Règles

- 1) si  $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$  alors  $A'B' = \lambda C'D'$
- 2) les homothétie conservent : le milieu, l'alignement, le parallélisme
3.  $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC}) = (k\overrightarrow{AB}, k\overrightarrow{AC})$  (La mesure des angles orientés et le Barycentre)
4. Si  $D$  est une droite passant par le centre de l'homothétie ; Alors :  $D$  est globalement invariante, Càd  $H(D) = D$

### Application 1

ABC est un triangle tel que le point A est fixe, les points B et C

Sont variables M est le milieu de [BC], G est le centre de gravité Du triangle ABC. Trouver le lieu géométrique de G si M décrit Un cercle fixe (C) de centre O Et de rayon 2 cm.



### Propriétés 4

- 1) homothétie d'une droite est une droite (parallèle ou confondue)
- 2) homothétie d'un segment est un segment
- 3) homothétie transforme deux droites parallèles ou perpendiculaires en deux droites parallèles ou perpendiculaires
- 4) homothétie d'un cercle  $C(A; R)$  est un cercle  $C'(A'; R')$ ; Tel que  $H(A) = A'$  et  $R' = |k| R$

### 6.2. Expression complexe d'une homothétie

$H(O, k)$  une homothétie et  $H(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow z' = az + b$

Ou  $z' - z_0 = k(z - z_0)$ . Avec  $a=k$  et  $z_0 = \frac{b}{1-a}$  où  $z_0$  est l'affixe du centre O

### Application 2

Soit  $h : M \rightarrow M'$  tel que  $z' = 2z + 1 - i$

Déterminer la nature de h et les éléments caractéristiques

### Application 3

- 1) Écrire l'expression complexe de  $h = \text{hom}(w(0;1), k = \frac{1}{2})$
- 2) soit A d'affixe  $2 + i$ , déterminer l'affixe de point B l'image de A par h.

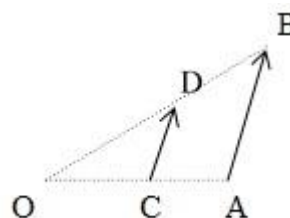
### Propriété 5

[AB] et [CD] étant deux segments tels que  $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

Alors il existe une homothétie et une seule qui transforme A en C et B en D

**Preuve :**  $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$  alors  $(AB) \parallel (CD)$ .

Soit O l'intersection de (AC) avec (BD),



D'après théorème de Thalès

On peut écrire :  $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB} = k$

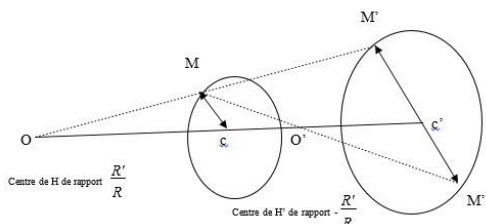
$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA}$  et  $\overrightarrow{OD} = k\overrightarrow{OB}$   $H(O,k)$  sera unique homothétie  
Qui transformant A en C et B en D

### Propriété 6

$C(c; R)$  et  $C'(c'; R')$  sont deux cercles

si  $R \neq R'$  alors il existe deux homothéties qui transforment (C) en (C') ;

$H(O, \frac{R'}{R})$  et  $H'(O', -\frac{R'}{R})$



**Preuve :** s'il existe une homothétie qui transformant (C) en (C')

Elle doit transformer le centre c en c' et un point quelconque

M en M' ou ( en M'' )

Alors  $\overrightarrow{M'C'} = k\overrightarrow{MC}$  par suite  $|k| = \frac{M'C'}{MC} = \frac{R'}{R} \Leftrightarrow k = \pm \frac{R'}{R}$

Mais le centre de l'homothétie se trouve sur (cc') et sur (MM') ou sur (MM'')

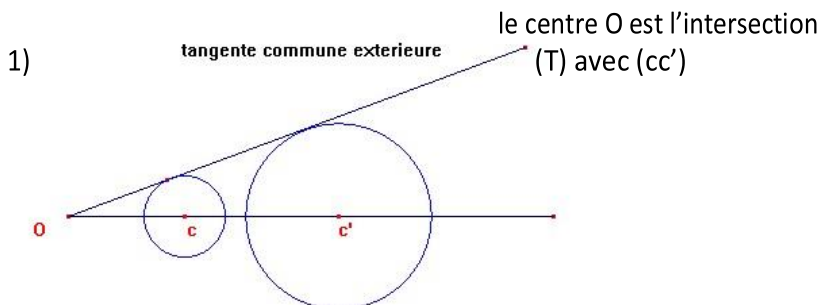
Alors il est l'intersection

### Remarque :

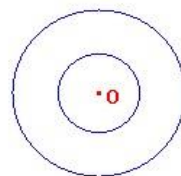
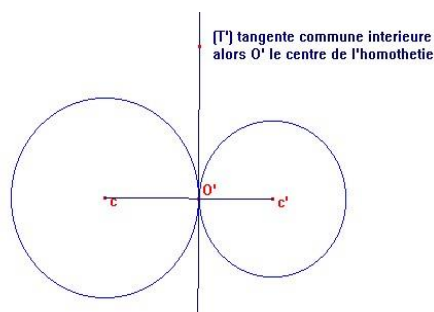
$H(O, \frac{R'}{R})$  alors :  $\overrightarrow{OC'} = \frac{R'}{R} \overrightarrow{OC}$  donc  $\overrightarrow{OC'} = \frac{R'}{R} \overrightarrow{OC}$  par suite  $\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{R'}{R}$

Donc on peut écrire :  $\frac{\overrightarrow{OC'}}{\overrightarrow{OC}} = \frac{\overrightarrow{O'C'}}{\overrightarrow{O'C}}$

### Cas particuliers



2)



si les cercles sont concentrique  
alors O est le centre

### Propriété 7

Si les rayons de deux cercles sont égaux  $R = R'$  alors il existe  
Une seule homothétie qui transforme  $(C)$  en  $(C')$   
 $|k| = 1$  alors  $H(O', -1)$  où  $O'$  est le milieu de  $[cc']$

### Remarque :

Dans ce cas ( $k = -1$ ) l'homothétie est une symétrie centrale Si  $k = 1$  l'homothétie est identique  
 $c' \neq c$  est impossible car  $c \neq c'$

### 6.3. Produit deux homothéties : $H_2$ et $H_1$

$$\begin{aligned} &H_1(O_1, k_1) \text{ et } H_2(O_2, k_2) \\ &\begin{cases} H_1(M) = M_1 \text{ et } H_2(M_1) = M' \\ H_1(N) = N_1 \text{ et } H_2(N_1) = N' \end{cases} \Leftrightarrow M'N' = k_1k_2MN \end{aligned}$$

#### Premier cas : si $k_1k_2 = 1$

Il y a deux cas a)  $O_1 \equiv O_2$

b)  $O_1 \neq O_2$

a) si  $k_1k_2 = 1 \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$  donc  $H_2 \circ H_1$  est une translation

$$H_2 \circ H_1(O_1) = H_2(H_1(O_1)) = H_2(O_1) = H_2(O_2) = O_2 = O_1$$

Par suite  $O_1$  est un point double alors cette translation est identique

b) si  $O_1 \neq O_2$  est une translation du vecteur  $\overrightarrow{O_1O'}$  où  $O' = H_2(O_1)$

### Attention :

$H_2 \circ H_1 \neq H_1 \circ H_2$  donc n'est pas commutative si  $O_1 \neq O_2$

#### Deuxième cas : si $k_1k_2 \neq 1$

Il y a deux cas a)  $O_1 \equiv O_2$

b)  $O_1 \neq O_2$

a) si  $k_1k_2 \neq 1$  et  $O_1 \equiv O_2$  donc  $H_2 \circ H_1$  est une homothétie de rapport  $k_1k_2$

$$H_2 \circ H_1(O_1) = H_2(H_1(O_1)) = H_2(O_1) = H_2(O_2) = O_2 = O_1$$

Par suite  $O_1$  est un point double alors  $H_2 \circ H_1$  est une homothétie de rapport  $k_1k_2$

et centre  $O_1$

b) si  $k_1 k_2 \neq 1$  et  $O_1 \neq O_2$

On pose  $w$  est le centre de  $H_2 \circ H_1$  alors :  $H_2 \circ H_1(w) = w$

$$\text{Soit } w' = H_1(w) \text{ donc } H_2(w') = w \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{O_1 w'} = k_1 \overrightarrow{O_1 w} \\ \overrightarrow{O_2 w} = k_2 \overrightarrow{O_2 w'} \end{cases}$$

$$\text{On peut d\'eduire que : } \overrightarrow{O_1 w} = \frac{1-k^2}{1-k_1 k_2} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

Conclusion

$H_2 \circ H_1$  est une homoth\'etie de rapport  $k_1 k_2$  et de centre  $w$  d\'efinie par :

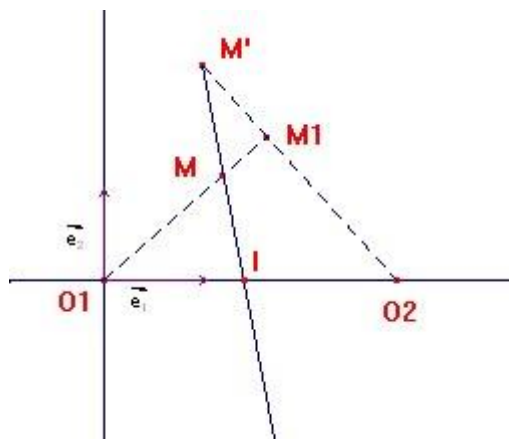
$$\overrightarrow{O_1 w} = \frac{1-k^2}{1-k_1 k_2} \overrightarrow{O_1 O_2}$$

**Attention :**

$H_2 \circ H_1 \neq H_1 \circ H_2$  Donc n'est pas commutative

**2<sup>ème</sup> m\'ethode complexe**  $H_1(O_1, k_1)$  et  $H_2(O_2, k_2)$

Choisissons un rep\ere orthonormal direct  $(O_1; e_1, e_2)$  d'origine  $O_1$  et tel que l'axe des r\'eels est porte par la droite  $(O_1 O_2)$ . (voir la figure )



**Notons  $b$  l'affixe de  $O_2$** , qui est donc un r\'eel non nul . L'\'écriture complexe de  $H_1$  est alors  $z' = k_1 z$ , et celle de  $H_2$  est  $z' = k_2(z - b) + b$ ,

alors l'\'écriture complexe de  $H_2 \circ H_1$  est  $z' = k_1 k_2 z + b(1 - k_2)$

**si  $k_1 k_2 = 1$** ,  $H_2 \circ H_1$  est la translation de vecteur  $u$  d'affixe  $b(1 - k_2)$ .

or  $b$  et  $k$  sont réels donc  $b(1-k_2)$  est un réel non nul, il en résulte que  $u$  est colinéaire à  $e_1$  donc dirige la droite  $(O_1O_2)$ .

**si  $k_1k_2 \neq 1$**  ;  $H_2 \circ H_1$  est une homothétie de rapport  $k_1k_2$  et de centre le point invariant  $I$  d'affixe  $\frac{b(1-k_2)}{1-k_1k_2}$ , or  $\omega$  est réel donc  $I$  est un point  $(O_1O_2)$

**Attention :** pour trouver le centre  $I$  de  $H_2 \circ H_1$

On choisit un point  $M$ , non situé sur  $(O_1O_2)$  et on place  $M_1 = H_1(M)$ , puis  $M' = H_2(M_1)$ . le point  $I$  est l'intersection de  $(O_1O_2)$  et  $(MM')$

### Remarque

Le produit de deux homothéties n'est pas toujours  
Une homothétie

### Corollaire

$w$  appartient à la droite  $(O_2O_2)$

La droite  $(O_2O_2)$  est invariante par  $H_1$ ,  $H_2$  et par  $H_2 \circ H_1$  car passe par le centre  
De chaque transformation

## Chapitre 8 : Similitude direct plane

### 8.1. Définitions :

#### Définition 1 (similitude directe)

Soit  $f$  la transformation qui a  $M \rightarrow M' = f(M)$  Tel que

$$\begin{cases} WM' = k.WM \\ \left( \overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'} \right) = \theta \quad [2\pi] \end{cases}$$

Cette transformation  $f$  est dite similitude directe de centre  $w$  et De rapport  $k$ . Et d'angle  $\theta$   
et on note  $S(W, k, \theta)$

### Définition 2 (similitude)

une similitude est une transformation qui conserve le rapport des distances  $\frac{M'N'}{P'Q'} = \frac{MN}{PQ}$

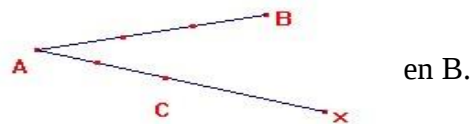
### Définition 3 (similitude)

une similitude est une transformation qui multiplie les distances

c'est-à-dire qu'il existe un réel  $k > 0$  tel que pour tous points M et N d'images respectives M' et N' on a :  $M'N' = kMN$

### Réciproquement

Si on a  $AB = 3AC$  et  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$  donc il existe une similitude de centre A de rapport 3 d'angle  $\frac{\pi}{6}$  qui transforme C



### Exemple 1

Soit  $S(A; \frac{2}{3}; -\frac{\pi}{6})$ . Construire C l'image de B par S

Réponse :

$S(B) = C$  donc par A menon une demi droite [Axe) tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{Ax}) = -\frac{\pi}{6} \quad [2\pi]$   
sur [Ax) on place un point C tel que  $AC = \frac{2}{3} AB$  alors : C est l'image de B par S

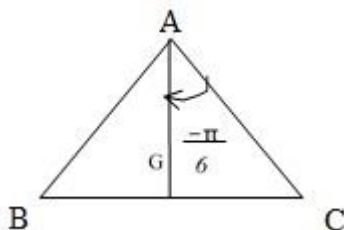
### Remarque 1

dire qu'une similitude est directe signifie qu'elle conserve les angles orientés ( translations , homothéties , rotations , et leurs composées sont similitudes directes )

### Application 1

ABC est un triangle équilatéral et G le centre de gravité du Triangle ABC et A' est le milieu de [BC]

- 1) montrer qu'il existe une similitude S qui transforme C en A'
- 2) montrer qu'il existe une similitude S qui transforme C en G



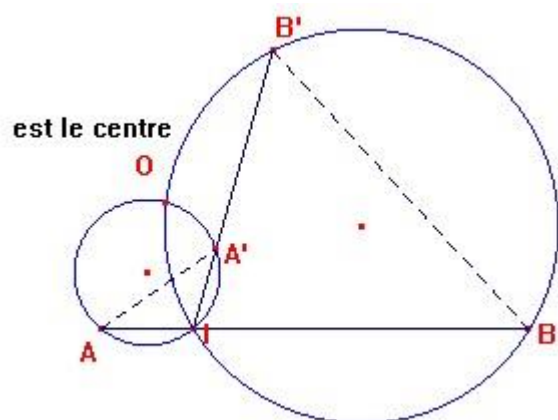
### Construction du centre de similitude

$S(A) = A'$  et  $S(B) = B'$

1<sup>ère</sup> étape: on pose  $I = (AB) \cap (A'B')$

2<sup>ème</sup> étape : tracer les deux cercles IAA' et IBB'

Alors le centre O est l'intersection des deux cercles



$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$$

Alors l'angle  $A'IB = \theta$  donc l'angle  $B'OB = \theta$

$\widehat{AIA'} = \pi - \theta$  ; donc  $\widehat{AOA'} = 2\pi - 2\theta$

Par suite  $\widehat{AIA'} = 2\theta$

Alors  $\widehat{AOA'} = \theta$

L'ensemble des points  $M$  du plan tels que :  $\frac{MA}{MB} = k$  est un Cercle dont le Centre appartient à la droite  $(AB)$

### Application 2

Soit  $S$  une similitude de rapport 2 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

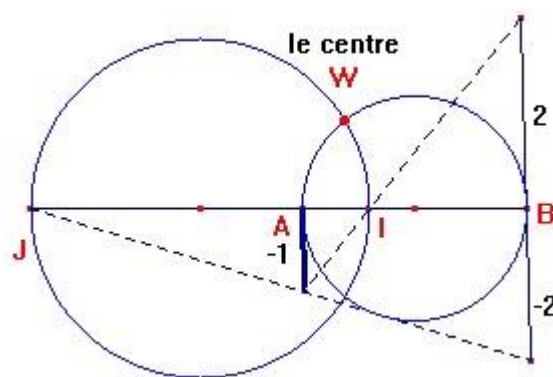
Qui transforme  $A$  en  $B$ ,  $S(A) = B$ . Construire le centre  $W$  de similitude

Reponse :

$$S(A) = B \Leftrightarrow \begin{cases} WA = 2WB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \end{cases}$$

D'après la remarque précédente  $W$  appartient à un cercle dont le Centre sur  $(AB)$ .

Alors  $W$  appartient à cercle  $(C')$  de diamètre  $[IJ]$  tel que  $\frac{IB}{IA} = -2$  et  $\frac{JB}{JA} = +2$



### Remarque 3

Une homothétie de rapport  $k$  est une similitude de rapport  $|k|$

Les translations, les rotations et les symétries sont des similitudes de rapport 1

### Propriétés 1

Soit  $S(W, k, \theta)$

- 1)  $S$  admet un seul point double qui est le centre  $W$  de  $S$ . ( $S(W) = W$ )

$$2) S^{-1} = (S(W, k, \theta))^{-1} = S(W, \frac{1}{k}, -\theta)$$

$$3) \text{ si } M' = S(M) \text{ et } N' = S(N) \text{ alors } \begin{cases} M'N' = kMN \\ (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{MN}) = \theta [2\pi] \end{cases}$$

## 8.2. Expression complexe de S (W, k, θ) directe

$$z' = az + b \text{ avec } a = ke^{i\theta} \text{ et } z_0 = \frac{b}{1-a}$$

Preuve :

M(z) , M'(z') et W(z<sub>0</sub>)

$$\begin{aligned} \begin{cases} WM' = kWM \\ (\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \theta [2\pi] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{WM'}{WM} = k \\ (\overrightarrow{WM}, \overrightarrow{WM'}) = \theta [2\pi] \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right| = k \\ \arg \left( \frac{z' - z_0}{z - z_0} \right) = \theta [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - z_0}{z - z_0} = ke^{i\theta} \end{aligned}$$

### Attention

En général, la forme complexe de similitude est  $z' = az + b$  ou  $z' = a\bar{z} + b$   
 Mais la forme complexe de similitude directe est  $z' = az + b$ .

### Application 3

Soit  $f : M \rightarrow M' = f(M)$  tel que  $z' = (1+i)z + 2 - 3i$   
 Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f

Éléments de réponses :

f est une similitude  $S(3+2i, \sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$

### Propriétés 2

1. Une similitude S qui a deux points invariants distincts A et B ; alors S est l'identité ou la réflexion d'axe (AB) . (Selon la forme complexe de S) .
2. si S a trois points invariants A,B,C non alignés alors S est l'identité
3. si S a un seul point invariant, S peut être une homothétie ou une rotation mais pas nécessairement

**Propriété 3**

$A, B, A', B'$  sont quatre points tels que  $A \neq B$  et  $A' \neq B'$ . Il existe une similitude directe  $S$  et une seule telle que  $S(A) = A'$  et  $S(B) = B'$ .

**Preuve :**

Notons  $z_A, z_B, z_{A'}, z_{B'}$ , les affixes des points  $A, B, A', B'$ , dans le plan complexe

Pour prouver l'existence et l'unicité d'une similitude directe  $S$  d'écriture complexe  $z' = az + b$ , revient à prouver l'existence et l'unicité de deux complexes  $a$  et  $b$ , avec  $a \neq 0$  tels que :

$$az_A + b = z_{A'} \text{ et } az_B + b = z_{B'}$$

D'après la résolution du système, on obtient  $b = z_{A'} - az_A$  et  $a = \frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_B}$ ,

donc  $a$  et  $b$  existent et sont uniques

## Chapitre 9 : Les inversions

**9.1. Définition :**

Soit  $O$  un point fixe et  $k \in \mathbb{R}$ ,  $M$  un point variable, on appelle inversion la transformation notée  $I$ , qui à  $M \rightarrow M'$  vérifiant :  $O, M, M'$  sont alignés et  $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k$

$O$  est appelé pôle de l'inversion ou centre.

$k$  est appelé le module de l'inversion ou puissance de l'inversion.

On note  $I(O, k)$

**9.2. Théorèmes :**

**Théorème 1**

L'image de  $O$  par  $I$  n'existe pas

**Preuve**

Posons  $O' = I(O)$  donc  $I, O, O'$  sont alignés et  $\overline{OO} \times \overline{OO'} = k$

Alors  $OO' = \frac{k}{\overline{OO}} = \frac{k}{0}$  impossible

**Points invariants par  $I$**

Soit  $M$  est un point invariant par  $I$ , alors  $\overline{OM} \times \overline{OM} = k \Leftrightarrow \overline{OM}^2 = k$

1) Si  $k < 0$  pas de point double

2) Si  $k > 0$ , l'ensemble des points doubles est le cercle de centre  $O$ , et de rayon  $\sqrt{k}$ .

**Théorème 2**

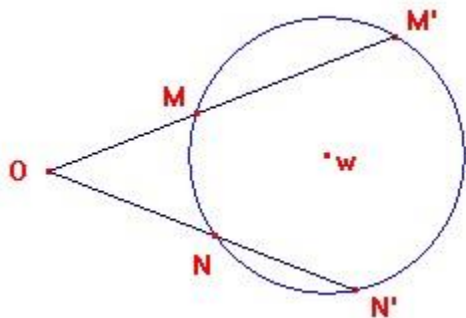
Dans une inversion  $I(O, k)$ , deux points quelconques  $M$  et  $N$  non alignés avec  $O$ , et  $I(M) = M', I(N) = N'$  alors les quatre points  $M, M', N, N'$  sont cocycliques.

**Preuve :**

$OM \times OM' = ON \times ON' = k$ , Alors  $MNM'N'$  est inscriptible

Dans un cercle (C) de centre w et de rayon R .tel que :  $Ow^2 - R^2 = k$

(Puissance de O par rapport à (C) égale à k )



**Attention**

Puissance de O par rapport à (C)

$$P_{O/(C)} = \overline{OM} \cdot \overline{OM'} = \overline{ON} \cdot \overline{ON'} = Ow^2 - R^2$$

**Théorème3 : inverse d'une droite**

- 1) l'image d'une droite passant par le pôle d'inversion est globalement invariante.
- 2) l'inverse d'une droite ne passe pas le pôle est un cercle passant par le pôle

**Preuve :**

Soit H le projeté orthogonal de O sur (D) , et  $H' = I(H)$  .

M est un point sur (D) .d'après théorème 2 , les points M ,M' ,H et H' sont cocyclique. ( MM'HH' est inscriptible) ; alors M' décrit le cercle de diamètre [OH']

**Propriété 1**

$$I(O, k) = I^{-1}(O, k) \text{ donc } I \text{ est Involutive}$$

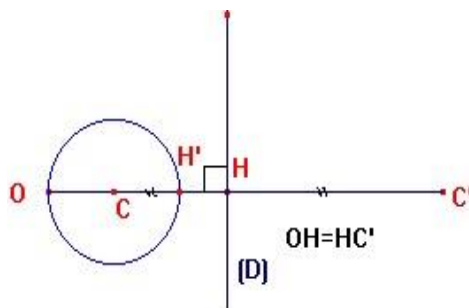
**Théorème4 : Inverse d'un cercle**

l'inverse d'un cercle passant par le Pôle est une droite perpendiculaire au diamètre passant par le pôle .

**Preuve :**

Puisque l'inversion est involutive (propriété 1)

Remarque : l'inverse du centre d'un cercle passant par le Pôle est le symétrique de ce pôle par rapport à la droite inverse de ce cercle .  $I(C) = C'$  où  $C' = \text{sym de } O/(D)$



### 9.3. Expression complexe de I( O , k)

Soit M d'affixe z ,et M' d'affixe z'

Donc O , M , M' sont alignes et  $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k$

or O , M , M' sont alignes alors  $\overrightarrow{OM'}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont colinéaires

Donc  $\overline{OM'} = \lambda \overline{OM} \Leftrightarrow \overline{OM'} = \lambda \overline{OM} \Leftrightarrow \overline{OM'} \times \overline{OM} = \lambda \overline{OM} \times \overline{OM}$

Alors  $\lambda = \frac{k}{\overline{OM}^2} = \frac{k}{OM^2} \Leftrightarrow \overline{OM'} = \frac{k}{OM^2} \overline{OM} \Leftrightarrow Z' - Z_0 = \frac{k}{OM^2} (Z - Z_0)$

$$\Leftrightarrow Z' - Z_0 = \frac{k}{(Z - Z_0)(\overline{Z} - \overline{Z}_0)} (Z - Z_0)$$

$$Z' - Z_0 = \frac{k}{(\overline{Z} - \overline{Z}_0)}$$

**Conclusion:**

Expression complexe de I( O , k) est :  $Z' - Z_0 = \frac{k}{(\overline{Z} - \overline{Z}_0)}$

**Cas particulier :** si O = l'origine ; Alors :  $Z' = \frac{k}{\overline{Z}}$

### 9.4. Expression analytique

$$\begin{cases} x = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases}$$