

Centre des Métiers d'Education et de Formation
Casablanca- Settati
Annexe Provinciale de Settati

Cycle de préparation au concours d'agrégation
Sciences Industrielles de l'Ingénieur (SII)
Ingénierie Mécanique (IM)

COURS

**METHODE DES ELEMENTS FINIS
APPLIQUEE A LA MECANIQUE DES
STRUCTURES**

M'hammed EL ALLAMI
m.elallami@gmail.com

Table des matières

Table des matières	1
Chapitre 1 Les principes.....	3
1.1 Définitions	3
1.2 Famille d'éléments	4
1.3 Exemples	4
1.4 Approximation des déplacements	5
1.5 Déformations	5
1.6 Contraintes	5
1.7 Equation du système.....	5
Chapitre 2 Problème de statique 1D.....	7
2.1 Equation du système.....	7
2.1.1 Energie de déformation	7
2.1.2 Travail des forces extérieures.....	8
2.1.3 Equation du système.....	8
2.2 Types d'éléments 1D.....	9
2.2.1 Élément Barre en traction- compression	9
2.2.2 Élément Poutre en flexion	10
2.3 Résolution d'un problème 1D.....	13
2.4 Exemples	14
2.4.1 Élément barre : Treillis plan.....	14
2.4.2 Élément poutre	15
Chapitre 3 Problème plan 2D	16
3.1 Equation du système.....	16
3.2 Différents types d'éléments en 2D	17
3.3 Élément Triangle	18
3.3.1 Approximation des déplacements	18
3.3.2 Matrice d'interpolation élémentaire	19

3.3.3	Déformations	20
3.3.4	Matrice raideur $[K_e]$	20
3.3.5	Résolution.....	20
3.4	Exemple.....	21
3.4.1	Analyse d'une structure de type "poutre 2D en flexion"	21

Chapitre 1

Les principes

Ce cours utilise des calculs éléments finis sous le logiciel RDM6 Gratuit à télécharger depuis :
<http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>

La Méthode des Eléments Finis consiste à :

- découper la structure en des subdivisions de formes simples
- et à choisir une approximation du déplacement sur chaque subdivision.

C'est une méthode de Ritz 'par morceaux' qui s'adapte aux géométries les plus complexes.

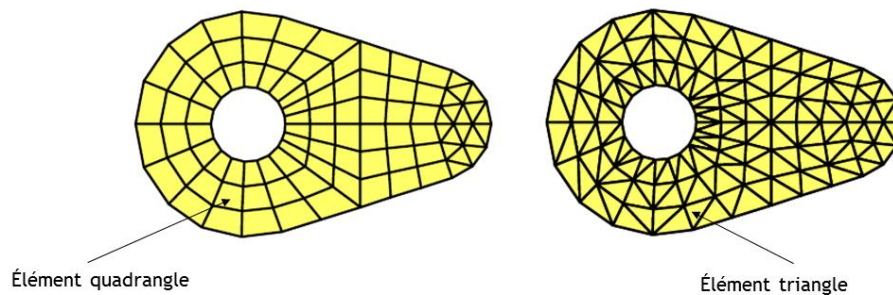


Figure 1 –Découpage d'une structure (2D)en des subdivisions de formes simples

1.1 Définitions

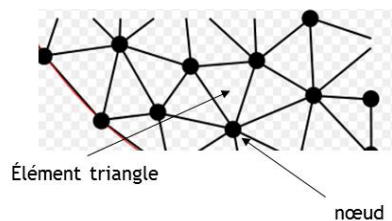


Figure 2 – Eléments finis et nœuds d'une structure.

- Les subdivisions sont appelées : Eléments finis,
- et les connexions entre éléments sont appelées : Nœuds.

1.2 Famille d'éléments

Il existe 3 grandes familles d'éléments. Les éléments uni-dimensionnels, bi-dimensionnels, tri-dimensionnels.

- Les éléments uni-dimensionnels En 1D : barre ou poutre

Le modèle uni-dimensionnel s'appuie sur les hypothèses restrictives de la RDM.

(Voir chapitre 2)

- Les éléments bi-dimensionnels En 2D et tri-dimensionnels En 3D : membranes, plaques et coques

Le modèle bi-dimensionnels ou tri-dimensionnels utilise, selon les cas, les théories des membranes, des plaques et des coques ou exploite les relations de l'élasticité.

(Voir chapitre 3)

1.3 Exemples

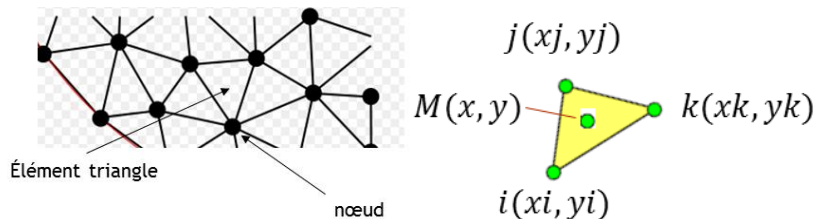


Figure 3 – Elément triangles à 3 nœuds

- (u_i, v_i, w_i) sont les composantes des déplacements pour le nœud i .
- Si l'élément introduit 3 nœuds (i, j, k) alors le nombre d'inconnus en 2D est 6. On range ces inconnus dans une colonne appelée vecteur des déplacements nœaux de l'élément e .

$$\langle U_e \rangle = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

- Si le maillage introduit n nœuds alors le nombre d'inconnus est $2n$ (en 2D) ou $3n$ (en 3D). On range ces inconnus dans une colonne appelée vecteur des déplacements globaux de la structure.

$$\langle U \rangle = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

1.4 Approximation des déplacements

Le déplacement d'un point M autre que les nœuds :

$$\vec{u}^*(M) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}N_{12}N_{13} \dots N_{1 \ 2n} \\ N_{21}N_{22}N_{23} \dots N_{2 \ 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ui \\ vi \\ uj \\ vj \\ uk \\ vk \end{bmatrix} = [N_e(M)]\langle U_e \rangle \quad 1.1$$

$\vec{u}^*(M)$ est l'approximation des déplacements réels $\vec{u}(M)$

$[N_e(M)]$: est la matrice d'interpolation élémentaire.

$N_{ij}(M)$: sont les fonctions d'interpolation élémentaires.

$\langle U_e \rangle$: regroupe les composantes des déplacements des nœuds de l'élément (e).

1.5 Déformations

$$\vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11}B_{12}B_{13} \dots B_{1 \ 2n} \\ B_{21}B_{22}B_{23} \dots B_{2 \ 2n} \\ B_{31}B_{32}B_{33} \dots B_{3 \ 2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ui \\ vi \\ uj \\ vj \\ uk \\ vk \end{bmatrix} = [B_e(M)]\langle U_e \rangle \quad 1.2$$

1.6 Contraintes

Lois de comportement :

$$\vec{\sigma}(M) = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} = [C][B_e(M)]\langle U_e \rangle \quad 1.3$$

1.7 Equation du système

L'équation du système est obtenue en utilisant l'énergie de déformation ou la formulation intégrale du principe des travaux virtuels. Ces deux méthodes utilisent toutes les deux un calcul en fonction des déplacements nodaux.

Si le comportement est linéaire, on obtient un système linéaire du type (voir démonstration aux paragraphes Chapitre 2 et Chapitre 3) :

$$[M]\langle \ddot{U} \rangle + [K]\langle U \rangle = \langle F \rangle \quad 1.4$$

Avec :

$[M]$: Matrice de masse globale,

$[K]$: Matrice de raideur globale,

$\langle U \rangle$: Vecteur des déplacements nodaux.

$\langle F \rangle$: Vecteur de forces nodales.

Ou encore si le problème est statique, le système s'écrit :

$$[K]\langle U \rangle = \langle F \rangle \quad 1.5$$

La solution d'un problème de structure mécanique $\langle U \rangle$ s'obtient-en résolvant le système linéaire.

Chapitre 2

Problème de statique 1D

2.1 Equation du système

2.1.1 Energie de déformation

Soit un corps élastique soumis à n forces $\mathbf{P}_i$ aux points $\mathbf{A}_i$ leur imposant des déplacements $\mathbf{U}_i$

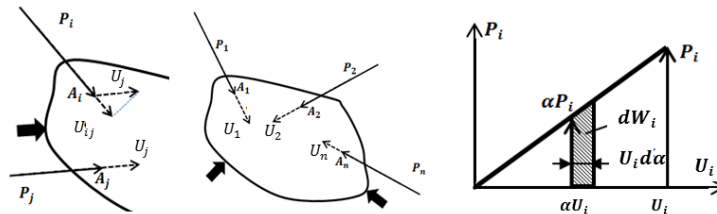


Figure 4 –Corps élastique soumis à n forces P_i aux points A_i

Le travail total fournit ou l'énergie élastique correspondante (1F de Clapeyron)

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i U_i = \frac{1}{2} \langle P \rangle^T \langle U \rangle$$

Le déplacement d'un point A_i s'écrit :

a_{ij} sont les coefficients d'influence ou de souplesse, et $[a]$ matrice de souplesse

$$U_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} P_j = [a] \langle P \rangle$$

2F de Clapeyron :

$$W = \frac{1}{2} \langle P \rangle^T [a] \langle P \rangle$$

Introduisons la matrice de raideur $[k]$

$$\langle P \rangle = [K] \langle U \rangle$$

$[K]$ est carrée et symétrique et : $[K] = [a]^{-1}$

Enfin l'expression de l'énergie :

$$W = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle K \rangle^T [a] [k] \langle U \rangle = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [K] \langle U \rangle$$

L'énergie de déformation de la structure est la somme des énergies de déformations élémentaires :

$$W = \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [K] \langle U \rangle = \sum_{e=1}^n W_e \quad 2.1$$

$\langle U \rangle$ est le vecteur déplacement global (ensemble des déplacements nodaux) et $[K]$ est la matrice de rigidité globale. La construction de $[K]$ à partir des matrices de rigidité élémentaires s'appelle assemblage. Pour réaliser cette opération, on exprime les énergies élémentaires en fonction des variables globales :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [K] \langle U \rangle = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U^e \rangle^T [k_e] \langle U^e \rangle = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U \rangle^T [K_e] \langle U \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \left(\sum_{e=1}^n [K_e] \right) \langle U \rangle \end{aligned}$$

D'où l'expression de la matrice de rigidité globale :

$$[K] = \sum_{e=1}^n [K_e] \quad 2.2$$

Dans la matrice $[K_e]$ obtenue par expansion de $[k_e]$, les seuls termes non nuls sont les termes associés aux degrés de liberté de l'élément (e).

2.1.2 Travail des forces extérieures

De même, le travail des forces extérieures s'écrit :

$$\begin{aligned} W_{\text{ext}} &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle F \rangle = \sum_{e=1}^n W_{\text{ext}}^e = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U^e \rangle^T \langle f^e \rangle = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \langle F^e \rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle U \rangle^T \left(\sum_{e=1}^n \langle F^e \rangle \right) \end{aligned}$$

D'où l'expression du vecteur force global :

$$\langle F \rangle = \sum_{e=1}^n \langle F^e \rangle \quad 2.3$$

2.1.3 Equation du système

L'égalité $W = W_{\text{ext}}$ permet d'écrire enfin l'équation du système :

$$[k] \langle U \rangle = \langle F \rangle \quad 2.4$$

C'est l'équation du système linéaire cherchée (équation 1.4 ou 1.5)

2.2 Types d'éléments 1D

2.2.1 Élément Barre en traction- compression

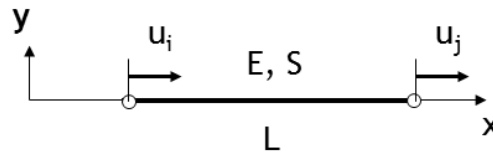


Figure 5 –Élément barre en traction- compression

E:module d'Young (N/m²) – S:section (m²) – L:longueur(m)

Bilan :

- 2 nœuds
- 2 ddl : 1 ddl par nœud (u_i,u_j)
- 1 élément

Les déplacements nodaux de l'élément barre : $\langle U_e \rangle = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix}$

Soit l'approximation nodale : $U^*(x) = a_0 + a_1 x = \langle 1, x \rangle \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Pour construire l'approximation nodale, nous devons identifier aux nœuds la valeur de l'approximation et les déplacements nodaux :

$$\langle U_e \rangle = \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

Avec : $[P_e(M)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}$ et $\langle A \rangle = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$

Encore, on peut écrire :

$$\langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

D'où l'expression du déplacement :

$$U^*(x) = \langle 1, x \rangle \langle A \rangle = \langle 1, x \rangle [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$

Avec :

$$[N_e(M)] = \langle 1, x \rangle [P_e(M)]^{-1}$$

Enfin l'expression du déplacement :

$$U^*(x) = \langle 1 - \frac{x}{L}, \frac{x}{L} \rangle \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \end{pmatrix} \quad 2.5$$

Le calcul de l'énergie de déformation permet d'avoir :

$$K = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2.6$$

- Transformation des matrices : Lorsque l'orientation d'un élément est différente de celle définie dans le repère de référence.

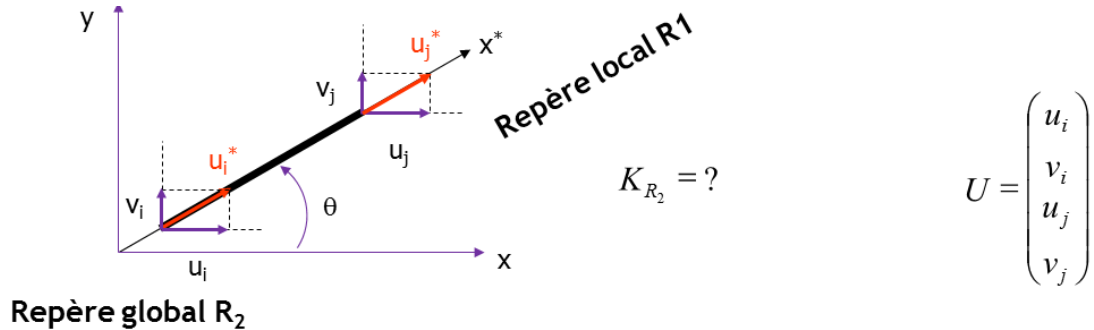


Figure 6 –Elément barre d'orientation quelconque.

$$\langle U \rangle = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{pmatrix} \quad K_{R2} = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} A & -A \\ -A & A \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

2.2.2 Élément Poutre en flexion

Matrice de rigidité élémentaire (poutre type Bernoulli : pas de cisaillement transverse)

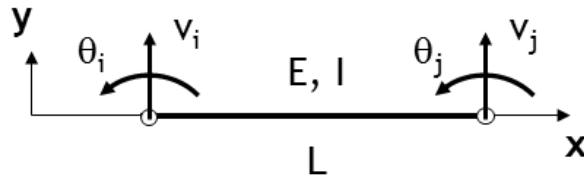


Figure 7 –Elément de poutre en flexion.

E:module d'Young (N/m²) – I:inertie de flexion (m⁴) – L:longueur(m)

Bilan :

- 2 nœuds
- 4 ddl : 2 ddl/nœud ($v_i, \theta_i, v_j, \theta_j$)
- 1 élément

Les déplacements nodaux de l'élément poutre : $\langle U \rangle = \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix}$

Soit l'approximation nodale :

$$\begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v^*(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ \theta^*(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \end{pmatrix}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Les conditions aux limites permettent d'écrire :

$$\langle U_e \rangle = \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

Avec :

$$\langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

D'où

$$\begin{pmatrix} v^*(x) \\ \theta^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, x, x^2, x^3 \\ 0, 1, 2x, 3x^2 \end{pmatrix} [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

Et :

$$v^*(x) = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{pmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} = \langle N_e \rangle \langle U_e \rangle \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N_1 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_2 = L \left(\frac{x}{L} - 2\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) \\ N_3 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \\ N_4 = L \left(-\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^3} \right) \end{cases} \quad 2.7$$

Le calcul de l'énergie de déformation permet d'avoir :

$$K = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad 2.8$$

- Élément Poutre en flexion avec déplacement axial de traction

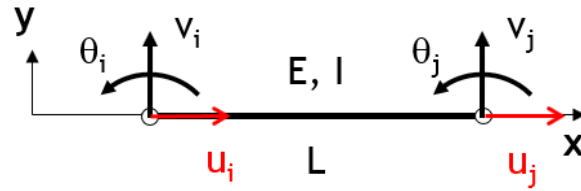


Figure 8 –Élément de poutre en flexion avec déplacement axial de traction.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad 2.9$$

- Élément Poutre en flexion avec déplacement axial de traction et orientation arbitraire

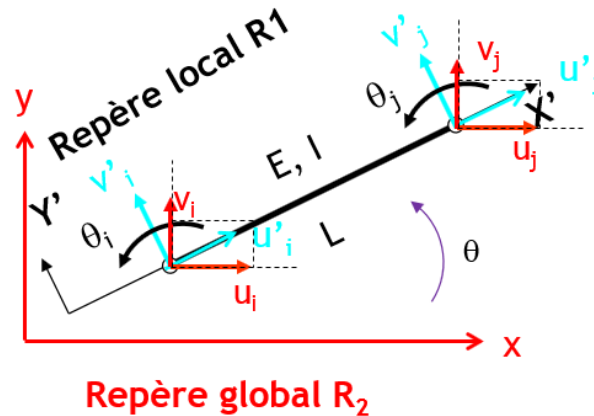


Figure 9 –Élément de poutre en flexion avec déplacement axial de traction et orientation arbitraire.

$$\underline{K} = \frac{E}{L} \begin{bmatrix} A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.S^2 & (A - \frac{12I}{L^2}).c.s & -\frac{6I}{L}.s & -(A.c^2 + \frac{12I}{L^2}).s^2 & -(A - \frac{12I}{L^2}).c.s & -\frac{6I}{L}.s \\ A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2 & \frac{6I}{L}.c & -(A - \frac{12I}{L^2}).c.s & -(A.s^2 + \frac{12I}{L^2}).c^2 & \frac{6I}{L}.c & \\ & 4I & \frac{6I}{L}.s & -\frac{6I}{L}.c & 2I & \\ & & A.c^2 + \frac{12I}{L^2}.s^2 & (A - \frac{12I}{L^2}).c.s & \frac{6I}{L}.s & \\ & & & A.s^2 + \frac{12I}{L^2}.c^2 & -\frac{6I}{L}.c & \\ & & & & & 4I \end{bmatrix} \quad 2.10$$

SYMETRIQUE

Si pas de traction :

$$\underline{K}^e = \frac{E.I}{L^3} \begin{bmatrix} 12s^2 & -12s.c & -6L.s & -12s^2 & 12s.c & -6L.s \\ -12s.c & 12c^2 & 6L.c & 12s.c & -12c^2 & 6L.c \\ -6L.s & 6L.c & 4L^2 & 6L.s & -6L.c & 2L^2 \\ -12s^2 & 12s.c & 6L.s & 12s^2 & -12s.c & 6L.s \\ 12s.c & -12c^2 & -6L.c & -12s.c & 12c^2 & -6L.c \\ -6L.s & 6L.c & 2L^2 & 6L.s & -6L.c & 4L^2 \end{bmatrix} \quad 2.11$$

2.3 Résolution d'un problème 1D

Partition des degrés de liberté

Méthode directe ou résolution par blocs (ou de partition), nécessite de modifier (réarranger) les termes des matrices (élimination de ligne - colonne). Elle est utilisée dans le cas où les ddl sont limités.

$$\begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ F_i \end{Bmatrix} \quad 2.12$$

U_i : sont les déplacements libres (inconnus)

U_c : sont les déplacements imposés (connus)

F_c : Forces correspondant aux déplacements libres (connues)

F_i : Forces correspondantes aux déplacements imposés (inconnues) *réactions d'appuis*

Ce qui donne :

$$\{U_i\} = [k_{11}]^{-1}(\{F_c\} - [k_{12}]\{U_c\}) \quad 2.13$$

$$\{F_i\} = [k_{21}]\{U_i\} + [k_{22}]\{U_c\}$$

Cas particulier fréquent

$$\text{Si } \{U_c\} = \{0\}$$

$$\{U_i\} = [k_{11}]^{-1}\{F_c\}$$

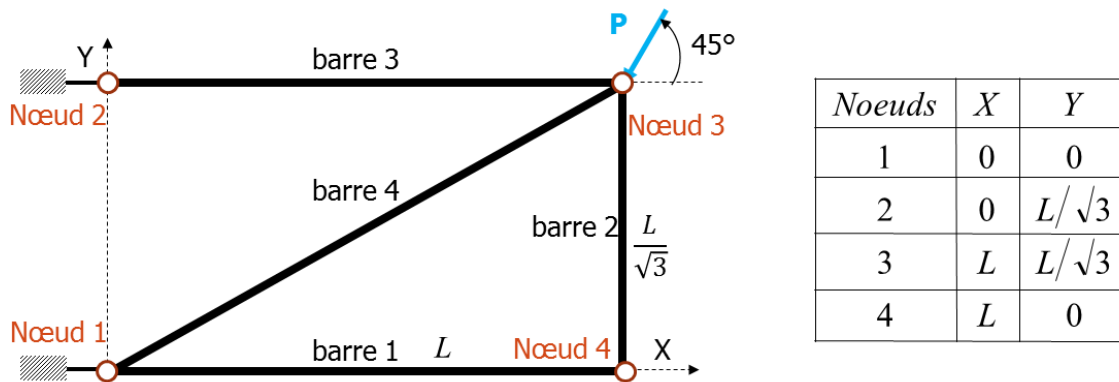
$$\{F_i\} = [k_{21}]\{U_i\} \quad 2.14$$

Seules les termes $[k_{11}]$ et $[k_{21}]$ de la matrices de raideur globale sont à calculer.

2.4 Exemples

2.4.1 Élément barre : Treillis plan

Soit le treillis plan modélisé par des éléments "barre".



Tous les nœuds sont des articulations. (E, S) : identiques pour toutes les barres.

- Établir les matrices de rigidité de chaque barre,

CAS 1 : Treillis de 3 barres (sans la barre 4)

- Établir la matrice de rigidité utile pour le calcul des déplacements inconnus.
- Calculer le déterminant de cette matrice puis conclure.

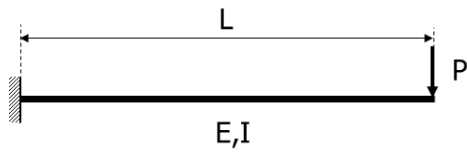
CAS 2 : Treillis de 4 barres

- Calculer les déplacements.
- Calculer et représenter les réactions aux encastresments.
- Calculer et représenter la déformée de la structure complète.
- Calculer les contraintes dans chaque élément.

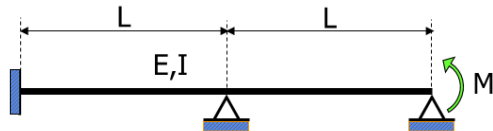
2.4.2 Élément poutre

Analyser les structures suivantes puis calculer les déplacements et des réactions aux liaisons.

- Structure de 1 élément de type "poutre en flexion"



- Structure de 2 éléments de type "poutre en flexion"



Chapitre 3

Problème plan 2D

3.1 Equation du système

Le principe des travaux virtuels (PTV) pour un problème de déformation de structures continue D s'écrit quel que soit le champ de déplacement virtuel $\vec{u}^*$, sous forme de l'équation :

$$\int_D \rho \vec{\gamma} \vec{u}^* dv = \int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv + \int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds - \int_D \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}^* dv \quad 3.1$$

Les déplacements réels et virtuels ont la même forme (équation 1.1) :

$$\vec{u}(M) = [N_e(M)] \langle u_e \rangle \quad \text{et} \quad \vec{u}^*(M) = [N_e(M)] \langle u^* \rangle$$

Le premier terme de l'équation du PTV :

$$\begin{aligned} \int_D \rho \langle \ddot{u}_e \rangle^T [N_e(M)]^T [N_e(M)] \langle u^* \rangle dv &= \langle \ddot{u}_e \rangle^T \left(\int_D \rho [N_e(M)]^T [N_e(M)] dv \right) \langle u^* \rangle \\ &= \langle \ddot{u}_e \rangle^T [M_e] \langle u^* \rangle \end{aligned}$$

Le deuxième et troisième terme de l'équation du PTV :

$$\begin{aligned} \int_D \vec{f}_v \vec{u}^* dv + \int_{\partial D} \vec{f}_s \vec{u}^* ds &= \left(\int_D [f_v]^T [N_e(M)] dv + \int_{\partial D} [f_s]^T [N_e(M)] ds \right) \langle u^* \rangle \\ &= [F_e]^T \langle u^* \rangle \end{aligned}$$

Le quatrième terme de l'équation du PTV :

$$\begin{aligned} \int_D \bar{\sigma} : \bar{\varepsilon}^* dv &= \int_D [[C][B_e(M)] \langle U_e \rangle]^T [B_e(M)] \langle u^* \rangle dv = \langle U_e \rangle^T \left(\int_D B_e(M)^T [C]^T [B_e(M)] dv \right) \langle u^* \rangle \\ &= \langle U_e \rangle^T [K_e] \langle u^* \rangle \end{aligned}$$

En remplaçant les quatre termes de (3.1), le principe des travaux virtuels s'écrit donc quel que soit le champ de déplacement virtuelle $\vec{u}^*$:

$$\langle \ddot{u}_e \rangle^T [M] \langle u^* \rangle = [F]^T \langle u^* \rangle - \langle U_e \rangle^T [K] \langle u^* \rangle$$

Ou encore :

$$\langle \ddot{u}_e \rangle^T [M_e] = [F_e]^T - \langle U_e \rangle^T [K_e]$$

Par construction $[M_e]$ et $[K_e]$ sont symétriques. Finalement on peut écrire :

$$[M_e] \langle \ddot{u}_e \rangle + [K_e] \langle U_e \rangle = [F_e] \quad 3.2$$

C'est l'équation du système linéaire cherché pour l'élément e (équation 1.4 ou 1.5). Avec :

$$[M_e] = \int_D \rho [N_e(M)]^T [N_e(M)] dv \quad \text{Matrice masse de l'élément e} \quad 3.3$$

$$[K_e] = \int_D [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] dv \quad \text{Matrice raideur de l'élément e} \quad 3.4$$

$$[F_e]^T = \int_D [f_v]^T [N_e(M)] dv + \int_{\partial D} [f_s]^T [N_e(M)] ds \quad \text{Vecteur force de l'élément e} \quad 3.5$$

Ce calcul permet après identification de trouver la matrice de masse $[M_e]$ et de raideur $[K_e]$ de l'élément e.

Les matrices globales de masse $[M]$ et de raideur $[K]$ de la structure s'obtiennent par assemblage des matrices de masse $[M_e]$ et de raideur $[K_e]$ de tous les éléments e.

3.2 Différents types d'éléments en 2D

Elément Triangle



Figure 10 –Elément Triangle à 3 et 6 nœuds.

Triangles de degré 1 : triangles à 3 nœuds, fonctions linéaires

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \end{bmatrix}$$

Triangles de degré 2 : triangles à 6 nœuds, polynômes de degré 2

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 \end{bmatrix}$$

Elément Quadrilatère ou quadrangle

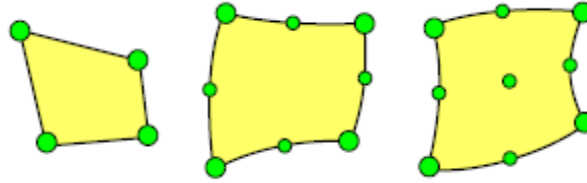


Figure 11 –Elément Quadrilatère ou carré à 4, 8 et 9 nœuds.

Quadrilatères de degré 1 : carrés à quatre nœuds, fonctions linéaires)

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy \end{bmatrix}$$

Quadrilatères de degré 2 : carrés à 8 ou 9 nœuds, polynômes de degré 2

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6x^2y + a_7xy^2 + a_8x^2y^2 \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y + b_3xy + b_4x^2 + b_5y^2 + b_6x^2y + b_7xy^2 + b_8x^2y^2 \end{bmatrix}$$

3.3 Elément Triangle

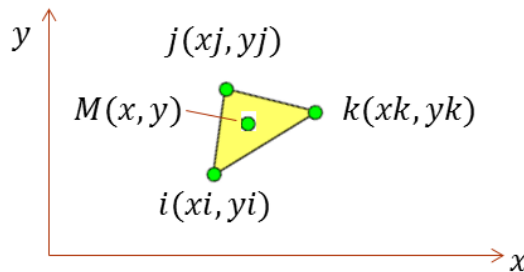


Figure 12 –Utilisation des éléments Triangle à 3 nœuds.

3.3.1 Approximation des déplacements

Pour l'élément Triangle à 3 nœuds, le déplacement d'un point M s'écrit :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y \\ v(x, y) = b_0 + b_1x + b_2y \end{bmatrix}$$

Ou encore sous forme matricielle :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

3.3.2 Matrice d'interpolation élémentaire

Les conditions aux limites permettent d'écrire aux points i, j et k :

$$\langle U_e \rangle = \begin{bmatrix} ui \\ vi \\ uj \\ vj \\ uk \\ vk \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = [P_e(M)] \langle A \rangle$$

Avec :

$$\langle A \rangle = [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle$$

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [P_e(M)]^{-1} \langle U_e \rangle = [N_e(M)] \langle U_e \rangle$$

Avec :

$$[P_e(M)] = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [P_e(M)]^{-1} = \frac{1}{\Delta_e} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\Delta_e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2 * S_{ijk} = 2 * \text{aire du triangle}(i, j, k) = \|\vec{ij} \wedge \vec{ik}\|$$

Et :

$$\begin{cases} ai = x_j y_k - x_k y_j \\ bi = y_j - y_k \\ ci = x_k - x_j \end{cases}$$

Les autres termes (indice j et k) sont obtenus par permutation circulaire des indices (i, j, k).

Et :

$$[N_e(M)] = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} [P_e(M)]^{-1} = \frac{1}{\Delta_e} \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i & 0 & a_j & 0 & a_k & 0 \\ b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ c_i & 0 & c_j & 0 & c_k & 0 \\ 0 & a_i & 0 & a_j & 0 & a_k \\ 0 & b_i & 0 & b_j & 0 & b_k \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{S_{ijk}} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} N1 = a_i + b_i x + c_i y \\ N2 = a_j + b_j x + c_j y \\ N3 = a_k + b_k x + c_k y \end{cases}$$

Finalement :

$$\vec{u}(M) = \begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \frac{1}{S_{ijk}} \begin{bmatrix} N1 & 0 & N2 & 0 & N3 & 0 \\ 0 & N1 & 0 & N2 & 0 & N3 \end{bmatrix} \langle U_e \rangle \quad 3.6$$

3.3.3 Déformations

$$\vec{\varepsilon}(M) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{bmatrix} = [B_e(M)] \langle U_e \rangle \quad 3.7$$

3.3.4 Matrice raideur [Ke]

D'après l'équation (3.4) :

$$[K_e] = \int_D [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] dv = [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] \int_D dv$$

$$dv = e S_{ijk}$$

et

e : épaisseur de la plaque

D'où :

$$[K_e] = [B_e(M)]^T [C]^T [B_e(M)] \cdot e \cdot S_{ijk}$$

Ou encore :

$$[K_e] = \begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ 0 & c_k & b_k \\ 0 & c_k & b_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{11} & c_{11} \\ c_{21} & c_{21} & c_{21} \\ c_{11} & c_{11} & c_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_k & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_k \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_k & b_k \end{bmatrix} e S_{ijk} \quad 3.8$$

$[K_e]$ est une matrice (6,6)=(6,3)*(3,3)*(3,6)

3.3.5 Résolution

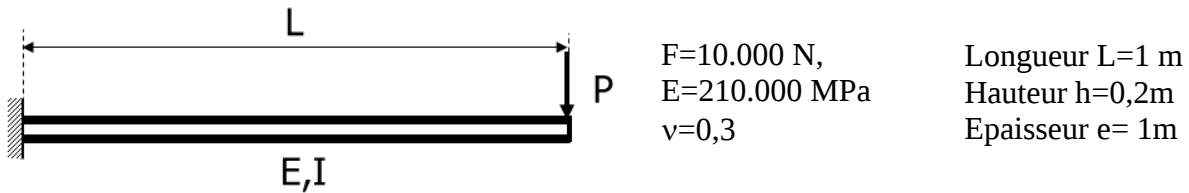
On utilise la méthode directe ou résolution par blocs (ou de partition) vue au chap2 dans le cas où les ddl sont limités.

Au cas de plusieurs ddl, on utilise des méthodes numériques de résolution. Ces méthodes sont vues en analyse Numérique. Pour les problèmes de statique on trouvera dans les codes EF deux types de méthodes :

- Les méthodes directes : Élimination de Gauss, décomposition LDU, ou Cholesky ...
- Les méthodes itératives de type Gauss-Seidel.

3.4 Exemple

3.4.1 Analyse d'une structure de type "poutre 2D en flexion"



Calculer les déplacements et des réactions aux liaisons en utilisant :

- Un maillage triangulaire de 3 et 6 nœuds.
- Un maillage rectangulaire de 4 et 8 nœuds,

Comparer les résultats aux valeurs théoriques puis conclure.