

Centre des Métiers d'Education et de Formation  
Casablanca- Settat  
Annexe Provinciale de Settat

Cycle de préparation au concours d'agrégation  
Sciences Industrielles de l'Ingénieur (SII)  
Ingénierie Mécanique (IM) et Electrique (IE)

## COURS

# MECANIQUE DES STRUCTURES THEORIE DES POUTRES

M'hammed EL ALLAMI

[m.elallami@gmail.com](mailto:m.elallami@gmail.com)

## Table des matières

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| Table des matières .....                                                      | 2  |
| Chapitre 1 Introduction à la théorie des poutres .....                        | 6  |
| 1.1 Buts.....                                                                 | 6  |
| 1.2 Hypothèses .....                                                          | 6  |
| 1.2.1 Le matériau.....                                                        | 6  |
| 1.2.2 La disposition de la matière .....                                      | 7  |
| 1.2.3 Les actions mécaniques extérieures .....                                | 7  |
| 1.2.4 Les déformations .....                                                  | 8  |
| 1.3 Principe fondamental de la statique .....                                 | 9  |
| 1.3.1 Les actions de liaison .....                                            | 9  |
| 1.3.2 Enoncé du Principe fondamental de la statique.....                      | 9  |
| 1.4 Repère de Frenet : .....                                                  | 10 |
| 1.5 Torseur des efforts de cohésion.....                                      | 10 |
| 1.5.1 Méthode des coupures de la poutre .....                                 | 11 |
| 1.5.2 Méthode des équations de l'équilibre local .....                        | 12 |
| 1.6 Notions d'élasticité linéaire .....                                       | 13 |
| 1.6.1 Contraintes .....                                                       | 13 |
| 1.6.2 Équations d'élasticité .....                                            | 14 |
| 1.7 Relation entre efforts intérieurs et contraintes .....                    | 15 |
| 1.8 Contrainte normale .....                                                  | 17 |
| 1.9 Torseur des petits déplacements et Torseur des taux de déformations ..... | 18 |
| 1.10 Condition de résistance .....                                            | 19 |
| 1.10.1 Concentration de contraintes .....                                     | 19 |
| 1.10.2 Résistance à la fatigue ou endurance.....                              | 20 |
| 1.11 Condition de rigidité ou de déformation .....                            | 21 |
| Chapitre 2 Traction- compression .....                                        | 22 |
| 2.1 Essai de traction .....                                                   | 22 |
| Chapitre 3 Torsion.....                                                       | 24 |
| 3.1 Hypothèses de l'étude .....                                               | 24 |
| 3.2 Essai de torsion.....                                                     | 24 |

|                                         |                                                                  |    |
|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3                                     | Champ de déplacements.....                                       | 25 |
| 3.4                                     | Contrainte tangentielle .....                                    | 26 |
| 3.5                                     | Déformations .....                                               | 28 |
| Chapitre 4 Flexion pure .....           |                                                                  | 30 |
| 4.1                                     | Déformations .....                                               | 31 |
| 4.2                                     | Champ de déplacements.....                                       | 31 |
| 4.3                                     | Déformée .....                                                   | 31 |
| Chapitre 5 Flexion plane simple.....    |                                                                  | 34 |
| 5.1                                     | Cisaillement transversal .....                                   | 34 |
| 5.2                                     | Cisaillement longitudinal .....                                  | 35 |
| 5.3                                     | Comparaison entre les contraintes normale et tangentielle .....  | 37 |
| 5.4                                     | Structures hyperstatiques.....                                   | 38 |
| 5.4.1                                   | Equations de déformation supplémentaire .....                    | 38 |
| 5.4.2                                   | Principe de superposition des effets de forces .....             | 39 |
| 5.4.3                                   | Technique des fonctions de singularité .....                     | 40 |
| 5.5                                     | Formules de Bresse .....                                         | 41 |
| Chapitre 6 Flexion déviée.....          |                                                                  | 45 |
| 6.1                                     | Axes principaux de la section (GZ et GY) (Rappel) .....          | 45 |
| 6.2                                     | Expression dans le repère principal (G, Y, Z) .....              | 46 |
| 6.3                                     | Expression dans le repère (G, y, z).....                         | 47 |
| Chapitre 7 Théorèmes énergétiques ..... |                                                                  | 48 |
| 7.1                                     | Par définition : .....                                           | 48 |
| 7.2                                     | Travaux des efforts extérieurs .....                             | 48 |
| 7.3                                     | Énergie de déformation .....                                     | 50 |
| 7.4                                     | Egalité de Clapeyron .....                                       | 51 |
| 7.5                                     | Réciprocité des travaux .....                                    | 52 |
| 7.6                                     | Théorème de Castigliano.....                                     | 54 |
| 7.7                                     | Théorème de Ménabréa : Pour les structures hyperstatiques .....  | 55 |
| Chapitre 8 Flambage .....               |                                                                  | 57 |
| 8.1                                     | Essai de flambage : Poutre en compression simple.....            | 57 |
| 8.2                                     | Théorie d'Euler .....                                            | 58 |
| 8.2.1                                   | Poutre bi- articulée .....                                       | 58 |
| 8.2.2                                   | Poutre bi- encastrée (Figure 49) .....                           | 60 |
| 8.2.3                                   | Poutre bi- articulée avec déformation initiale (Figure 50) ..... | 60 |

|                                       |                                                        |    |
|---------------------------------------|--------------------------------------------------------|----|
| 8.2.4                                 | Contrainte critique d'Euler /Élancement .....          | 61 |
| 8.2.5                                 | Domaine d'utilisation de la formule d'Euler.....       | 62 |
| 8.2.6                                 | Calcul de résistance .....                             | 63 |
| 8.3                                   | Méthode de Dutheil .....                               | 64 |
| Chapitre 9 Fatigue des matériaux..... |                                                        | 66 |
| 9.1                                   | Introduction .....                                     | 66 |
| 9.2                                   | Essai de traction d'une pièce métallique (Rappel)..... | 67 |
| 9.3                                   | Essai de base de fatigue ( $R=-1$ ).....               | 68 |
| 9.3.1                                 | Courbe de Wöhler .....                                 | 68 |
| 9.3.2                                 | Domaines de la courbe de Wöhler .....                  | 69 |
| 9.3.3                                 | Limite d'endurance des aciers $\sigma_D(R = -1)$ ..... | 69 |
| 9.4                                   | Essai de fatigue ( $R \neq -1$ ).....                  | 70 |
| 9.4.1                                 | Diagrammes de Haigh.....                               | 71 |
| 9.4.2                                 | Diagramme de Ross .....                                | 72 |
| 9.5                                   | Cas réels de fatigue .....                             | 73 |
| 9.5.1                                 | Cas d'autres sollicitations simples .....              | 73 |
| 9.5.2                                 | Cas de concentrations de contraintes .....             | 74 |
| 9.5.3                                 | Prise en compte des dimensions de la poutre .....      | 74 |
| 9.5.4                                 | Prise en compte de l'état de surface.....              | 74 |
| 9.5.5                                 | Méthode de calcul simplifiée .....                     | 74 |
| Chapitre 10 Treillis.....             |                                                        | 76 |
| 10.1                                  | Généralités.....                                       | 76 |
| 10.1.1                                | Efforts sur la structure .....                         | 77 |
| 10.1.2                                | Nœud articulé et nœud rigide .....                     | 78 |
| 10.1.3                                | Hyperstaticité .....                                   | 79 |
| 10.2                                  | Résolution des treillis isostatiques .....             | 80 |
| 10.2.1                                | Méthode des sections ou de Ritter.....                 | 80 |
| 10.2.2                                | Méthode des nœuds ou de Cremona .....                  | 81 |
| 10.2.3                                | Méthode générale .....                                 | 81 |
| 10.3                                  | Résolution des treillis hyperstatiques .....           | 82 |
| 10.3.1                                | Méthode des déplacements.....                          | 82 |
| 10.3.2                                | Méthode des éléments finis .....                       | 82 |
| 10.4                                  | Post-traitement .....                                  | 82 |
| 10.4.1                                | Vérification à la limite élastique .....               | 82 |

|                                                   |                                                                         |     |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.4.2                                            | Vérification au flambement.....                                         | 82  |
| 10.4.3                                            | Déformations des nœuds .....                                            | 83  |
| Chapitre 11 Vibration des systèmes continus. .... |                                                                         | 85  |
| 11.1                                              | Vibrations longitudinales .....                                         | 86  |
| 11.1.1                                            | Vibrations libres .....                                                 | 86  |
| 11.1.2                                            | Fréquences propres et modes propres .....                               | 87  |
| 11.1.3                                            | Exemples .....                                                          | 88  |
| 11.1.4                                            | Orthogonalité des modes .....                                           | 89  |
| 11.1.5                                            | Normalisation .....                                                     | 90  |
| 11.1.6                                            | Exemple.....                                                            | 91  |
| 11.1.7                                            | Vibrations forcées .....                                                | 91  |
| 11.2                                              | Vibrations de torsion .....                                             | 92  |
| 11.3                                              | Vibrations transversales de flexion .....                               | 93  |
| 11.3.1                                            | Fréquences et modes propres .....                                       | 94  |
| 11.3.2                                            | Exemples .....                                                          | 95  |
| 11.3.3                                            | Orthogonalité des modes .....                                           | 96  |
| 11.3.4                                            | Normalisation .....                                                     | 97  |
| 11.3.5                                            | Exemples .....                                                          | 97  |
| 11.3.6                                            | Vibrations forcées .....                                                | 98  |
| 11.4                                              | Méthodes approchées .....                                               | 99  |
| 11.4.1                                            | Energie cinétique et énergie potentielle .....                          | 99  |
| 11.4.2                                            | Méthode de Rayleigh : Approximation de la fréquence fondamentale.....   | 99  |
| 11.4.3                                            | Méthode de Rayleigh- Ritz : Approximation des premières fréquences..... | 102 |

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des poutres

### 1.1 Buts

C'est l'étude de la résistance des matériaux dans le but de construire dans les meilleures conditions, la théorie des poutres vise à établir les relations qui existent entre les **dimensions**, les **contraintes** et les **déformations** d'un solide sous l'action de forces extérieures qui lui sont appliquées et compte tenu des propriétés des matériaux dont il est constitué. Elle est utilisée pour 4 raisons :

#### Calcul de résistance

Il faut déterminer les dimensions d'une pièce pour :

- qu'elle résiste aux diverses forces externes
- et que les sollicitations internes ne dépassent pas certaines limites (en tout point).

#### Calcul de rigidité

Les déformations doivent être inférieures à une déformation limite que l'on s'est fixée.

#### Calcul de vérification

Certaines dimensions peuvent être imposées par le montage, il faudra donc vérifier si ces dimensions conviennent :

- soit en fonctions des sollicitations
- Soit en fonction des déformations.

#### Choix des matériaux

Dans certains problèmes ou les **dimensions** ou la **masse** ou les **déformations** sont limitées (industrie aéronautique par exemples), c'est la nature du matériau qui sera l'inconnue. Il faut **choisir** le matériau ou le **vérifier** d'après les charges appliquées.

### 1.2 Hypothèses

Sont de 4 types :

#### 1.2.1 Le matériau

Le matériau est :

- Homogène : il a les mêmes propriétés en tout point
- isotrope : en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

Le comportement du matériau est :

- linéaire : les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires

- Élastique : le solide reprend sa forme initiale si les forces appliquées sont supprimées.

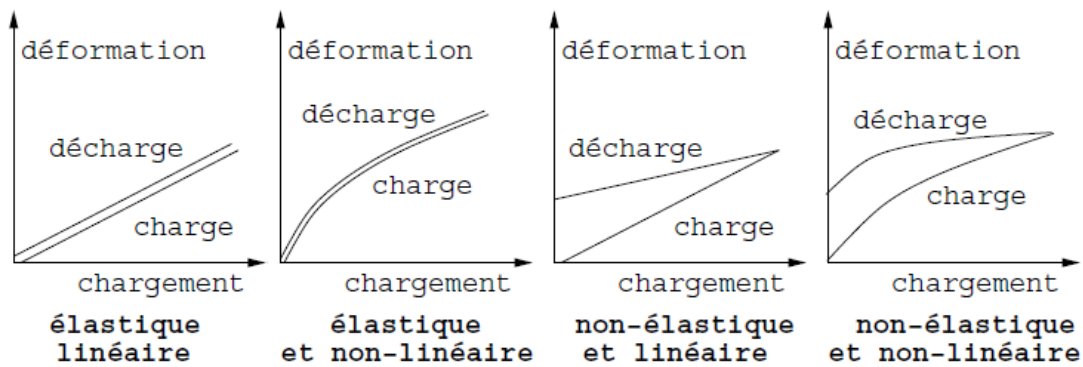


Figure 1 –Différents comportement du matériau

### 1.2.2 La disposition de la matière

Dans ce chapitre, les solides étudiés sont des poutres dont la longueur est plus grande par rapport aux dimensions transversales. Cela simplifiera la forme du tenseur de contraintes et de déformation. En ajoutant d'autres hypothèses, on aboutira à une théorie simplifiée "Théorie des poutres".

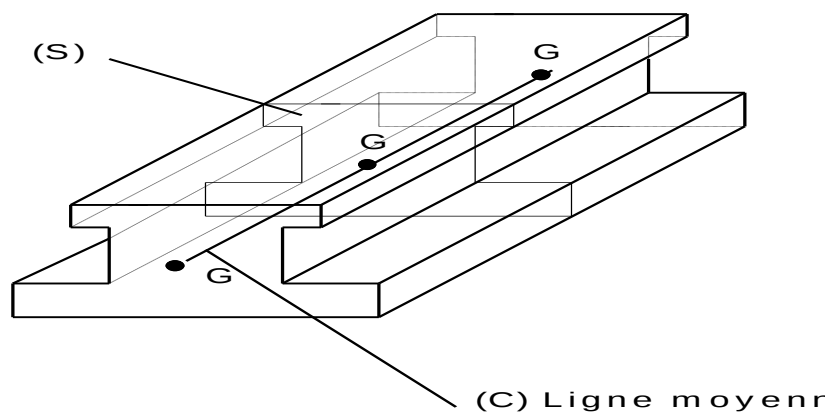


Figure 2 –Poutre

Une *poutre* est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*. La ligne moyenne est une droite ou à grand rayon de courbure.

- section droite (S) : constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- existence d'un plan de symétrie.

### 1.2.3 Les actions mécaniques extérieures

**Plan de symétrie** : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.

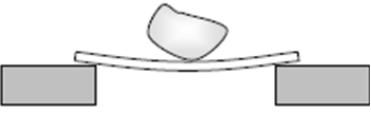
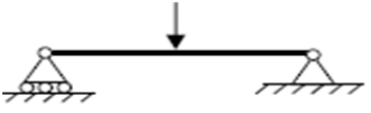
| Types                                                  | Situation réelle                                                                  | Modélisation                                                                       |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Ponctuelles<br>(N)                                     |  |  |
| Réparties<br>(N/m)                                     |  |  |
| Forces de volume<br>(poids propre) (N/m <sup>2</sup> ) |  |  |

Tableau 1. Types d'actions mécaniques extérieures.

Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre. Les supports des forces seront considérés comme constants après déformation.

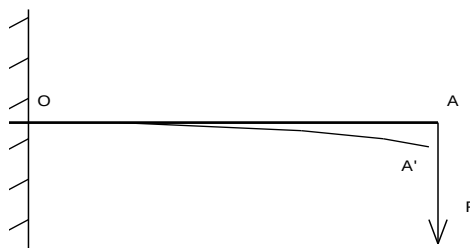


Figure 3 –Les supports des forces sont considérés constants après déformation.

#### 1.2.4 Les déformations

- Hypothèse des petites déformations HPD : Les déformations sont petites par rapport aux dimensions de la poutre.
- Hypothèse de Navier & Bernoulli : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

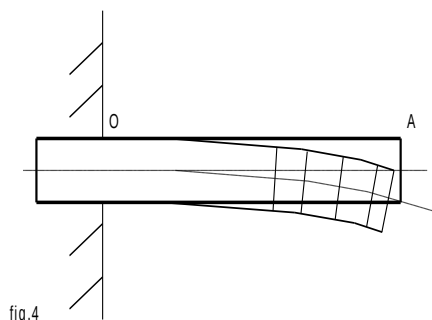


Figure 4 –Poutre après déformation

- Principe de St Venant : « Les contraintes et les déformations dans une section droite éloignée des points d'application d'un système de forces ne dépendent que des efforts de cohésion au centre de gravité de cette section. »
- **Conséquences :**
  - La valeur des contraintes (et déformations) sont valables loin des points d'application des forces (On considère les résultats valables qu'au-delà de 2 à 3 fois la plus grande dimension transverse.).
  - Quel que soit la nature d'un système de force, seul le torseur résultant des efforts de cohésion au centre de gravité de la section  $\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}$  détermine l'état de celle-ci.

### 1.3 Principe fondamental de la statique

#### 1.3.1 Les actions de liaison

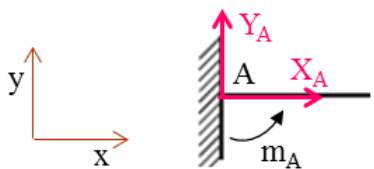
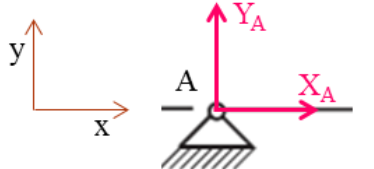
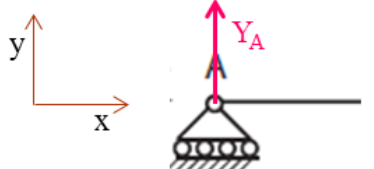
| Nom          | ddl | ddl interdits                 | Efforts transmis 3D                                                   | Efforts transmis 2D                                             | Schéma 2D                                                                             |
|--------------|-----|-------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| Encastrement | 0   | 3 translations<br>3 rotations | $\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A$ | $\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & m_A \end{Bmatrix}_A$ |   |
| Articulation | 1   | 3 translations<br>2 rotations | $\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$   | $\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$   |  |
| Appui simple | 5   | 1 translation                 | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$           | $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$     |  |

Tableau 2. Actions de liaison

#### 1.3.2 Enoncé du Principe fondamental de la statique

Un solide indéformable E, sollicité par un système de forces extérieures, est en équilibre si et seulement si :

$$\{\bar{E} \rightarrow E\} = \{0\} \quad \text{Ou encore} \quad \begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_{\text{extérieurs}} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \sum \vec{M} \vec{F}_{\text{extérieurs}/A} = \vec{0} \end{cases} \quad 1.1$$

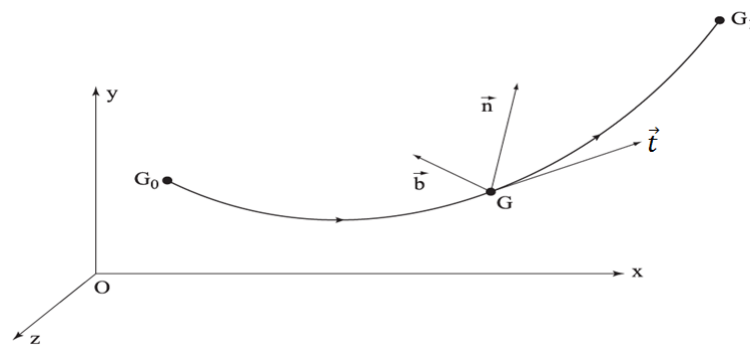
**NB:** le choix du point A est uniquement guidé par des raisons de commodité.

| Equations d'équilibre |                                                                                                                                                                   |                                                                                                            |
|-----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                       | Système 3D (Oxyz)<br>(6 équations)                                                                                                                                | Système 2D (Oxy)<br>(3 équations)                                                                          |
| $R = 0$               | $\Sigma \text{ proj. sur Ox des } F_{\text{ext}}=0$<br>$\Sigma \text{ proj. sur Oy des } F_{\text{ext}}=0$<br>$\Sigma \text{ proj. sur Oz des } F_{\text{ext}}=0$ | $\Sigma \text{ proj. sur Ox des } F_{\text{ext}}=0$<br>$\Sigma \text{ proj. sur Oy des } F_{\text{ext}}=0$ |
| $M_A = 0$             | $\Sigma \text{ moments/ Ox des } F_{\text{ext}}=0$<br>$\Sigma \text{ moments/ Oy des } F_{\text{ext}}=0$<br>$\Sigma \text{ moments/ Oz des } F_{\text{ext}}=0$    | $\Sigma \text{ moments/ Oz des } F_{\text{ext}}=0$                                                         |

Tableau 3. Equations d'équilibre

#### 1.4 Repère de Frenet :

Soit une poutre curviligne, définie par sa ligne moyenne  $G_0G_1$  et soit un repère orthonormé d'origine  $G$ , lié à la ligne moyenne  $G_0G_1$ .

Figure 5 –Repère de Frenet lié à la ligne moyenne  $G_0G_1$ 

Le repère orthonormé direct  $\{G, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$  est le repère de Frenet de la courbe  $G_0G_1$  au point  $G$  :

- $\vec{t}$  **premier vecteur** de la base : unitaire, tangent à la courbe  $G_0G_1$  en  $G$  et orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes :  $\vec{t} = \frac{d\vec{OG}}{ds}$
- $\vec{n}$  **second vecteur** de la base : unitaire, normal à  $\vec{t}$ , dirigé vers le centre de courbure, nommé vecteur normal principal,.
- $\vec{b}$  **troisième vecteur** de la base défini par :  $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$ , se nomme binormal.

Soit une poutre (E) en équilibre sous l'action de  $n$  actions extérieures. On associe à cette poutre un repère  $R(G, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$  dont l'axe  $\vec{t}$  coïncide avec la ligne moyenne de la poutre.

#### 1.5 Torseur des efforts de cohésion

Coupons la poutre (E) par un plan (P) orthogonal à sa ligne moyenne et situé à l'abscisse  $s$ . On définit ainsi deux portions de poutre (E1) et (E2).

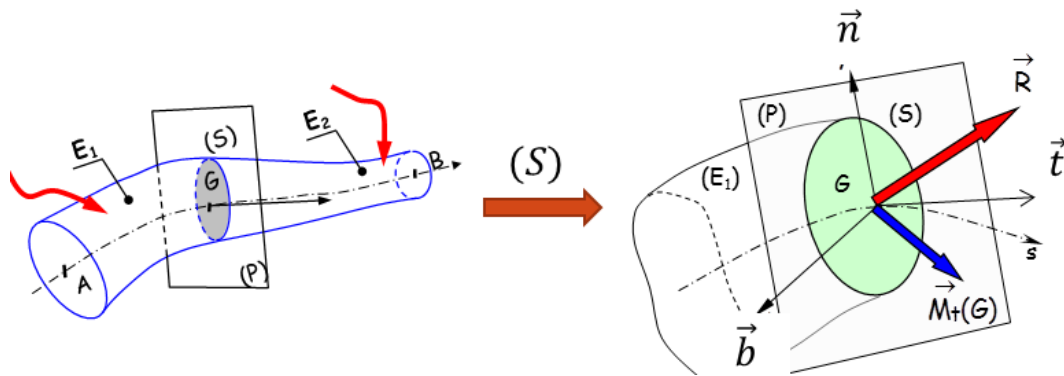


Figure 6 –Poutre (E) coupée en deux portions (E1) et (E2).

Le torseur  $\{E_2 \rightarrow E_1\}$  est le **torseur de cohésion** ou **torseur des efforts intérieurs**.

Les efforts intérieurs permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures. On vise en particulier à vérifier qu'en aucun point de la poutre, les efforts de cohésion ne soient supérieurs aux capacités du matériau. Le torseur de cohésion est exprimé en coordonnées de Frenet  $R(G, t, n, b)$  ou en coordonnées cartésiennes  $R(G, x, y, z)$  :

$$\{Cohésion\} = \begin{cases} \vec{R}(s) = N\vec{t} + T_n\vec{n} + T_b\vec{b} \\ \vec{M}_G(s) = M_t\vec{t} + M_{f_n}\vec{n} + M_{f_b}\vec{b} \end{cases} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_n & M_{f_n} \\ T_b & M_{f_b} \end{pmatrix}_{G,t,n,b} \quad 1.2$$

$$\{Cohésion\} = \begin{cases} \vec{R}(x) = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ \vec{M}_G(x) = M_t\vec{x} + M_{f_y}\vec{y} + M_{f_z}\vec{z} \end{cases} = \begin{pmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{f_y} \\ T_z & M_{f_z} \end{pmatrix}_{G,x,y,z}$$

On peut identifier le type de sollicitation que subit la poutre suivant les éléments de réduction non-nuls du torseur de cohésion :

- Traction- compression :  $N \neq 0$
- Cisaillement :  $T_y \neq 0$  ou  $T_z \neq 0$
- Torsion :  $M_t \neq 0$
- Flexion pure :  $M_{f_2} \neq 0$  ou  $M_{f_3} \neq 0$
- Flexion simple :  $(T_y \neq 0, M_{f_z} \neq 0)$  ou  $(T_z \neq 0, M_{f_y} \neq 0)$

Lorsque l'on a une seule de ces sollicitations on parle de sollicitation simple, sinon on parle de sollicitation composée. Exemple :

- Flexion composée :  $(N \neq 0, T_y \neq 0, M_{f_z} \neq 0)$  ou  $(N \neq 0, T_z \neq 0, M_{f_y} \neq 0)$
- Flexion déviée :  $(T_y \neq 0, M_{f_z} \neq 0)$  et  $(T_z \neq 0, M_{f_y} \neq 0)$ .
- Flexion composée déviée :  $N \neq 0$  et  $(T_y \neq 0, M_{f_z} \neq 0)$  et  $(T_z \neq 0, M_{f_y} \neq 0)$
- Flexion – torsion :  $(M_t \neq 0, T_y \neq 0, M_{f_z} \neq 0)$  ou  $(M_t \neq 0, T_z \neq 0, M_{f_y} \neq 0)$

### 1.5.1 Méthode des coupures de la poutre

(E) étant en équilibre, on peut écrire :  $\{\bar{E} \rightarrow E\} = \{0\}$

(E1) étant en équilibre, on peut écrire :  $\{\bar{E} \rightarrow E_1\} + \{E_2 \rightarrow E_1\} = \{0\}$

(E2) étant en équilibre, on peut écrire :  $\{\bar{E} \rightarrow E_2\} + \{E_1 \rightarrow E_2\} = \{0\}$

On en déduit :

$$\{Cohésion\} = \{E_2 \rightarrow E_1\} = -\{\bar{E} \rightarrow E_1\} = \{\bar{E} \rightarrow E_2\} \quad 1.3$$

### Convention adoptée dans ce cours :

Le torseur de cohésion est égal à (-) le torseur des efforts extérieurs appliqués à gauche de la section de coupe.

### 1.5.2 Méthode des équations de l'équilibre local

Considérons la tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ , comprise entre les sections droites voisines  $S$  (d'abscisse curviligne  $s$  et de centre  $G$ ) et  $S'$  (d'abscisse curviligne  $s + ds$  et de centre  $G'$ ).

Supposons que les forces et couples extérieurs appliqués au niveau de cette tranche soient tous répartis. Notons  $\vec{p}(s).ds$  et  $\vec{m}_r(s).ds$  leur résultantes en  $G$ .

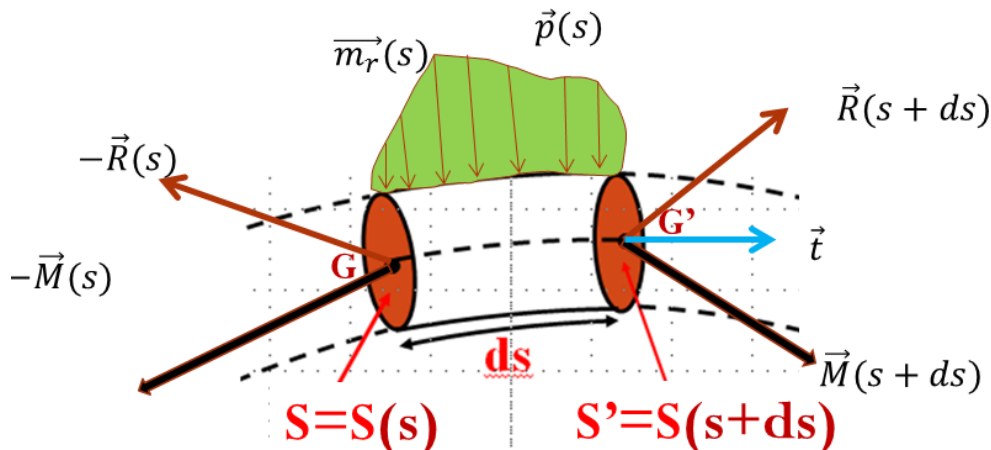


Figure 7 –Tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ .

L'équilibre du tronçon permet d'écrire les deux équations de l'équilibre local :

$$\text{Équation de la résultante} \quad \frac{d\vec{R}(s)}{ds} + \vec{p}(s) = \vec{0} \quad 1.4$$

$$\text{Équation du moment en } G' \quad \frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{R}(s) + \vec{m}_r(s) = \vec{0}$$

$$\text{Si :} \quad \vec{p}(s) = p \vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{m}_r(s) = \vec{0}$$

Alors les équations de l'équilibre local deviennent :

$$\frac{dN(s)}{ds} = 0 \quad \frac{dT(s)}{ds} = -p(s) \quad \frac{dM(s)}{ds} = -T(s) \quad 1.5$$

## 1.6 Notions d'élasticité linéaire

### 1.6.1 Contraintes

#### Vecteur contrainte en un point M

Effectuons par une surface  $S$ , une **coupure** d'un solide en deux parties  $E1$  et  $E2$ .

La partie  $E1$  (Figure 8. a) est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons un point  $M$  de  $S$ ,  $dS$  un élément de la surface infiniment petit entourant le point  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, normal en  $M$  à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de  $E1$ .

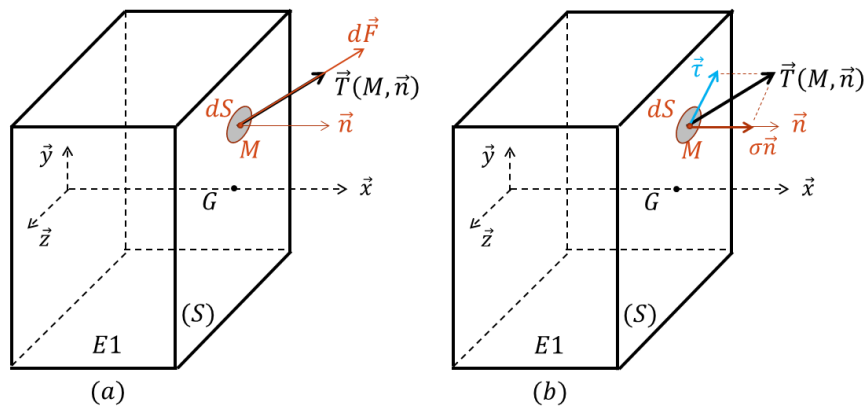


Figure 8 – Vecteur contrainte en un point M.

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur la **facette**  $\vec{n}$  en  $M$ . On appelle vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$ , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS} \quad 1.6$$

Une contrainte s'exprime en pascal ( $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ). Dans la pratique, on utilise le MégaPascal ( $1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2$ )

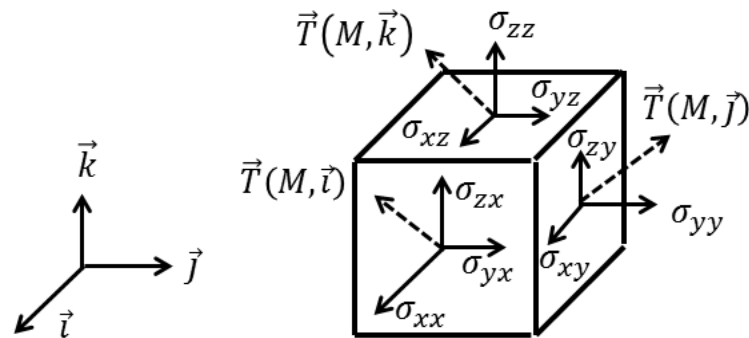
#### Contrainte normale/ contrainte tangentielle :

Le vecteur contrainte peut être décomposé en (Figure 8. b) :

- Contrainte normale  $\sigma$  : c'est la projection de  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur la normale  $\vec{n}$  de la facette. Si  $\sigma$  est positive, on a localement un état de traction, sinon un état de compression.
- Contrainte tangentielle  $\tau$ , appelée aussi contrainte de cisaillement ou cession: c'est la projection de  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sur le plan de la facette.

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

$$\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\vec{\tau}\|^2 \quad \sigma = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \|\vec{\tau}\|^2 = \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \sigma^2 \quad 1.7$$

**Tenseur des contraintes**Figure 9 – Composantes du tenseur de contraintes  $\bar{\sigma}(M)$  sur les trois facettes du point M

Considérons le cube infiniment petit d'un solide, centré sur le point M, construit sur les axes  $x, y, z$ . Les contraintes au point M sont :

$$\text{sur la facette } \vec{i} : \quad \vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$$

$$\text{sur la facette } \vec{j} : \quad \vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k}$$

$$\text{sur la facette } \vec{k} : \quad \vec{T}(M, \vec{k}) = \sigma_{xz}\vec{i} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$$

Soit le tenseur  $\bar{\sigma}(M)$  dont les colonnes sont les contraintes sur les trois facettes  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  du repère  $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$  :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad 1.8$$

$$\text{Avec :} \quad \vec{T}(M, \vec{i}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{i} \quad \vec{T}(M, \vec{j}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{j} \quad \vec{T}(M, \vec{k}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{k}$$

$$\text{Pour une facette } \vec{n} \text{ quelconque :} \quad \vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n} \quad 1.9$$

$\bar{\sigma}(M)$  est le tenseur des contraintes de Cauchy au point M. Ce tenseur est symétrique.

Les termes diagonaux du tenseur sont les contraintes normales et les termes non diagonaux  $\tau_{ij}$  sont les contraintes tangentielles.

**1.6.2 Équations d'élasticité**

Les contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i \quad 1.10$$

L'état de contraintes dans le solide provoque un état de déformation. Pour tout point M, le tenseur de déformations s'écrit :

$$\bar{\bar{\varepsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Les déformations sont obtenues en dérivant les déplacements :

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} \quad 1.11$$

Le vecteur rotation s'écrit :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{u} \quad 1.12$$

Les déformations sont obtenues aussi en utilisant les lois de comportement:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad 1.13$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les coefficients de **Lamé** et  $E$  et  $\nu$  sont les coefficients de **Hooke** ou de **Young**.

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} = G \quad 1.14$$

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad 1.15$$

Pour résoudre un problème d'élasticité, on est amené à utiliser souvent l'une des équations de Navier ou de Beltrami :

Equations de Navier :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) + (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) = \vec{0} \quad 1.16$$

Equations de Beltrami (Cas de forces de volumes constantes) :

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,ij}}{1+\nu} = 0 \quad 1.17$$

## 1.7 Relation entre efforts intérieurs et contraintes

Prenons une poutre dont l'état de contraintes en un point M de la section S est :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_z & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad 1.18$$

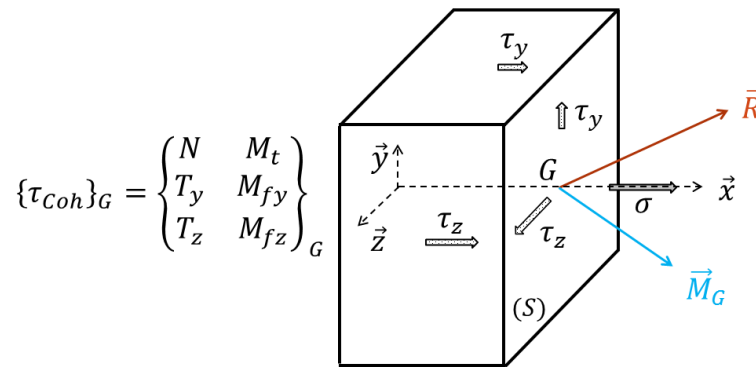


Figure 10 –Problème de Saint-Venant.

Le Principe de Saint Venant postule que quel que soit la nature d'un système de force, seul le torseur résultant des efforts de cohésion, au centre de gravité de la section détermine l'état de celle-ci.

Dans la section droite S, la normale  $\vec{n} = \vec{x} = (1,0,0)$  et la contrainte  $\vec{T}(M, \vec{x}) = (\sigma, \tau_y, \tau_z)$ .

Les éléments du torseur de cohésion peuvent s'écrire :

$$\vec{R} = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} = \int_S \vec{T}(M, \vec{x}) ds$$

Et

$$\vec{m}_G = M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} = \int_S \vec{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) ds$$

En calculons les deux expressions, on trouve :

|                                         |      |                               |      |                                 |      |
|-----------------------------------------|------|-------------------------------|------|---------------------------------|------|
| $N = \int_S \sigma ds$                  | 1.19 | $T_y = \int_S \tau_y ds$      | 1.20 | $T_z = \int_S \tau_z ds$        | 1.21 |
| $M_t = \int_S (y \tau_z - z \tau_y) ds$ | 1.22 | $M_{fy} = \int_S z \sigma ds$ | 1.23 | $M_{fz} = - \int_S y \sigma ds$ | 1.24 |

Les contraintes  $(\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz})$  ne figurent pas sur les éléments du torseur de cohésion. Le tenseur de contraintes se réduit donc à :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)} \quad 1.25$$

$\sigma$  : contrainte normale et  $\tau_y$  et  $\tau_z$  sont des contraintes tangentielles.

### 1.8 Contrainte normale

Pour une facette de la section droite, on constate que les éléments de réduction :  $N$ ,  $M_{fy}$  et  $M_{fz}$  ne font intervenir que la contrainte normale  $\sigma$ . On choisit donc pour les contraintes :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition aux limites sur la surface latérale  $\vec{n} = (0, y, z)$ , libre de contrainte est vérifiée.

On applique les équations d'équilibre (1.10), on obtient :

$$\sigma_{,x} = 0 \quad \text{alors :} \quad \sigma = \sigma(y, z) \quad 1.26$$

Les équations de Beltrami (1.17) s'écrivent :

$$\sigma_{,yy} = \sigma_{,zz} = \sigma_{,yz} = 0$$

$$\text{Donc} \quad \sigma = a + by + cz \quad 1.27$$

L'équations (1.27) dans (1.19), (1.23) et (1.24) permettent d'écrire les éléments du torseur de cohésion :

$$\begin{aligned} N &= a \int_S ds + b \int_S y ds + c \int_S z ds \\ M_{fy} &= a \int_S z ds - b \int_S yz ds - c \int_S z^2 ds \\ M_{fz} &= -a \int_S y ds - b \int_S y^2 ds - c \int_S yz ds \end{aligned}$$

Avec ce choix, les éléments du torseur de cohésion s'écrivent :

$$N = a S \quad M_{fy} = c I_{Gy} \quad M_{fz} = -b I_{Gz}$$

Et la contrainte normale s'écrit :

$$\sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y + \frac{M_{fy}}{I_{Gy}} z \quad 1.28$$

$I_{Gz}$  et  $I_{Gy}$  sont les moments quadratiques respectivement par rapport à  $Gz$  et à  $Gy$  (en  $\text{mm}^4$ ) avec :

$$I_{Gy} = \int_S z^2 ds \quad \text{et} \quad I_{Gz} = \int_S y^2 ds \quad 1.29$$

### 1.9 Torseur des petits déplacements et Torseur des taux de déformations

Considérons la section droite  $S(s)$ , d'abscisse curviligne  $s$ , de centre  $G$  et normale aux fibres d'une poutre.

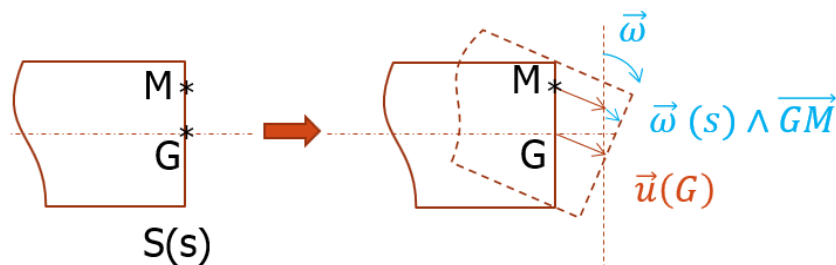


Figure 11 – Cinématique d'une section droite  $S(s)$  normale aux fibres.

L'hypothèse de Navier & Bernoulli permet d'assimiler la cinématique d'une section droite ( $S$ ) normale aux fibres au mouvement d'un corps solide (pas de déformation transverse possible).

Le torseur de petits déplacements au centre de gravité  $G$  de la section ( $S$ ) s'écrit alors :

$$\{dep S/R\}_G = \begin{cases} \vec{\omega}(s) = \omega_t(s)\vec{t} + \omega_n(s)\vec{n} + \omega_b(s)\vec{b} \\ \vec{u}_G(s) = u_t(s)\vec{t} + u_n(s)\vec{n} + u_b(s)\vec{b} \end{cases}_G \quad 1.30$$

Le déplacement d'un point  $M$  de la section  $S(s)$  s'écrit :

$$\vec{u}_M(s) = \vec{u}_G(s) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM} \quad 1.31$$

Considérons une tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ , comprise entre les sections droites voisines :  $S$  (d'abscisse curviligne  $s$  et de centres  $G$ ) et  $S'$  (d'abscisse curviligne  $s + ds$  et de centres  $G'$ ).

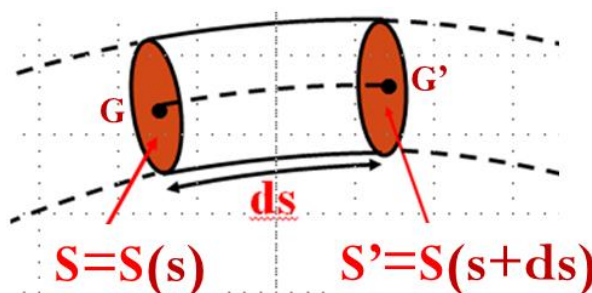


Figure 12 –Tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ .

Le torseur de petits déplacement pour les sections  $S$  et  $S'$  de la tranche élémentaire de poutre peuvent s'écrire :

$$\{dep S/R\}_G = \begin{cases} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(s) \end{cases}_G \quad \text{et} \quad \{dep S/R\}_{G'} = \begin{cases} \vec{\omega}(s + ds) = \vec{\omega}(s) + d\vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(s + ds) = \vec{u}(s) + d\vec{u}(s) \end{cases}_{G'}$$

Le torseur des taux de déformation est par définition :

$$\{Def S/R\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{\gamma}(s) \\ \vec{\varepsilon}(s) \end{matrix} \right\}_G = \frac{\{dep S'/R\}_G - \{dep S/R\}_G}{ds} = \frac{d}{ds} \{dep S/R\}_G$$

Le tenseur de taux de déformation s'écrit alors :

$$\{Def S/R\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{\gamma}(s) = \gamma_t \vec{t} + \gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \vec{t} + \varepsilon_n \vec{n} + \varepsilon_b \vec{b} \end{matrix} \right\}_G = \{Def S/R\}_G = \left\{ \begin{matrix} \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \\ \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{\omega} \end{matrix} \right\}_G \quad 1.32$$

Les termes du tenseur de taux de déformation sont les déformations des différentes sollicitations. Ils désignent la dilatation ou l'allongement relatif et les glissements ou distorsions.

### 1.10 Condition de résistance

Pendant toute la durée de son service, une pièce doit conserver un comportement élastique. Cette condition s'exprime par :

- Pour les contraintes normales :

$$\sigma_{maxi} \leq \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s} = R_{pe} = \frac{R_e}{s} \quad 1.33$$

- Pour les contraintes tangentielles :

$$\tau_{maxi} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s} = R_{pg} = \frac{R_g}{s} \quad 1.34$$

- Pour une contrainte combinée : normales  $\sigma$  + tangentielles  $\tau$ , on utilise l'un des deux critères suivants :

Critère de Tresca

Critère de Von Mises

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_p$$

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_p \quad 1.35$$

$\sigma_e$  ou  $R_e$  est la limite élastique à la traction et  $\sigma_p$  ou  $R_{pe}$  est la résistance pratique à la traction  
 $\tau_e$  ou  $R_g$  est la limite élastique au cisaillement et  $\tau_p$  ou  $R_{pg}$  est la résistance pratique au glissement.

$s$  est le coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon le domaine d'application.

#### 1.10.1 Concentration de contraintes

Des pièces industrielles peuvent posséder des singularités de formes (perçages, gorges, rainures, filetages...). Ces singularités font augmenter la contrainte dans ces pièces.

Pour cette raison, on définit un coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  tel que :

$$\sigma_{maxi} = k_t \cdot \sigma_{nom}$$

$\sigma_{maxi}$  : contrainte maximale atteinte au voisinage de la singularité

$\sigma_{nom}$  : contrainte moyenne nominale calculée loin de la singularité :

La condition de résistance s'écrira dans ce cas :

$$\sigma_{maxi} = k_t \cdot \sigma_{nom} \leq \sigma_p \quad 1.36$$

**Exemple 1 :** Pour un filetage triangulaire ISO :  $K_t = 2.5$

**Exemple 2 :** Arbre épaulé de section circulaire.

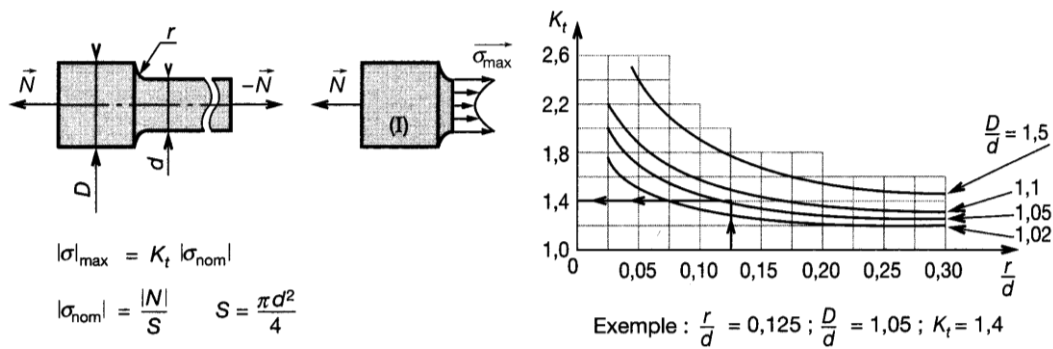


Figure 13 Concentrations de contraintes dans un arbre épaulé de section circulaire

### 1.10.2 Résistance à la fatigue ou endurance

Exemple : si une vis de diamètre 6 mm peut tenir un objet d'une tonne, elle peut en revanche casser si on lui suspend un objet plus léger de 100 kg un million de fois de suite.

La **fatigue** désigne l'endommagement d'une pièce sous l'effet d'efforts variables et répétés, vibrations, rafales de vent... L'application et le retrait d'efforts plus faibles que prévu peut provoquer sa rupture.

Les étapes principales de la ruine d'un assemblage par fatigue sont :

- l'amorçage de fissures (si des défauts ne sont pas déjà présents dans le matériau).
- la propagation de fissures.
- et la rupture finale.

Les paramètres souvent utilisés pour prédire le comportement en fatigue sont :

- l'amplitude de la sollicitation (chargement ou déformation imposée).
- fréquence d'application des charges,
- nombre de cycles.

### Courbe de Wöhler

Cette courbe montre que l'endurance ou la résistance à la rupture d'une pièce diminue avec le nombre de cycles appliqués.

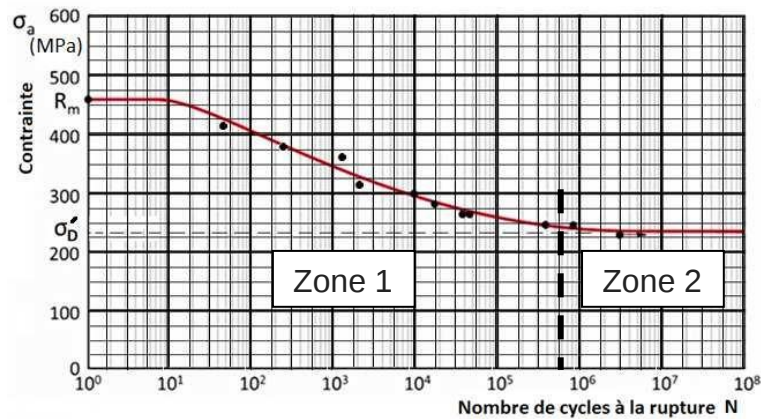


Figure 14 Courbe de Wöhler pour un acier.

**Zone 1** : c'est la zone de fatigue ou la rupture est atteinte au bout d'un nombre limité de cycles. Si pour une sollicitation ou la contrainte maximale par exemple est  $\sigma = 300$  MPa, la rupture se produit avec une probabilité correcte avant  $10^4$  cycles.

**Zone 2** : c'est la zone d'endurance illimitée ou la rupture n'est atteinte qu'après un nombre élevé de cycles proche de  $10^8$ .

L'asymptote à la courbe de Wöhler permet de trouver la limite d'endurance  $\sigma_D$  au-dessous de la quelle il n'y aura pas de risque de rupture.

Pour les aciers,  $\sigma_D$  pourrait être trouvée expérimentalement :

$$\begin{aligned} \sigma_D &= 0.4 \sigma_e + 0.25 \sigma_r && \text{Roger} \\ \sigma_D &= 0.32 \sigma_r + 121 && \text{Brand} \end{aligned} \quad 1.37$$

$\sigma_e$  est la limite d'élasticité,  $\sigma_r$  est la limite de rupture et  $\sigma_D$  est la limite d'endurance.

La condition de résistance à la fatigue s'écrira dans ce cas :

$$\sigma_{maxi} \leq \sigma_D \quad 1.38$$

### 1.11 Condition de rigidité ou de déformation

La condition de résistance donne des pièces sous-dimensionnées très déformables et qui sont source de vibrations et ne réalisent pas des transmissions rigides. Beaucoup de pièces se calculent par une condition de déformation en déplacement ou en rotation :

$$y_{maxi} \leq y_{limite} \quad \text{ou bien :} \quad \alpha_{Maxi} \leq \alpha_{limite} \quad 1.39$$

## Chapitre 2

### Traction- compression

Le tenseur de cohésion dans une section droite s'écrit :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

D'après l'équation (1.28) :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\sigma}} = \frac{N}{S} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 2.1$$

Les lois de comportement (1.13) permettent de trouver les déformations :

$$\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{\sigma}{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma}{E} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \frac{-\nu\sigma}{E} = -\nu\varepsilon \quad 2.2$$

La loi de Hooke (1.13) permet d'écrire :

$$\sigma = \frac{N}{S} = E \varepsilon \quad 2.3$$

La déformation de traction s'obtient aussi en dérivant le champ de déplacements (1.11) :

$$\varepsilon = \frac{du_x}{dx}$$

L'allongement total  $\Delta L$  de la poutre de longueur  $L$  est :

$$\Delta L = \int_0^L du_x = \int_0^L \varepsilon dx = \varepsilon \int_0^L dx = \varepsilon L$$

$$\text{D'où :} \quad \varepsilon = \frac{N}{ES} = \frac{du_x}{dx} = \frac{\Delta L}{L} \quad 2.4$$

Ces relations sont confirmées par l'essai expérimental de traction.

#### 2.1 Essai de traction

**Principe** : Sur une machine d'essai, on tire sur une éprouvette d'un matériau, pour relever l'évolution de la force de traction  $F$  en fonction de l'allongement de l'éprouvette  $\Delta L$  ou encore l'évolution de la contrainte  $\sigma$  (MPa) en fonction de l'allongement relatif longitudinal  $\varepsilon$  (sans unité).

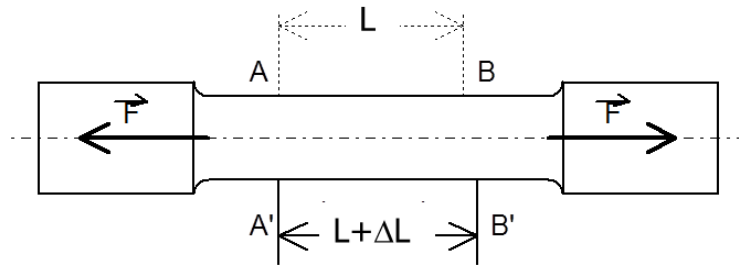


Figure 15 –Eprouvette d'essai de traction

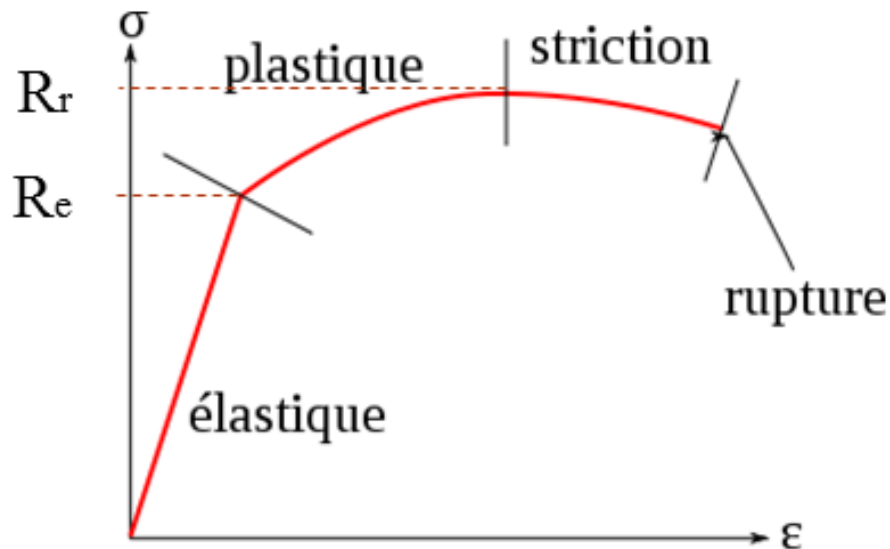


Figure 16 –Graphe de l'essai de traction

**Zone élastique :** Dans le domaine élastique :

- la déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée. La relation de proportionnalité est la loi de Hooke (équation 2.3).
- La déformation élastique est une déformation réversible. Le milieu retourne à son état initial lorsque l'on supprime les sollicitations.
- $R_e$  (ou  $\sigma_e$ ) est la valeur limite de la contrainte dans le domaine élastique, appelée aussi limite élastique.

**Zone plastique :** Dans le domaine plastique, on déforme de manière définitive la pièce. La déformation plastique est une déformation irréversible. Il n'y a plus de proportionnalité entre la contrainte et la déformation et la loi de Hooke (2.3) n'est plus valable.

**Zone de striction :** C'est le rétrécissement transversal d'une éprouvette soumise à l'essai de traction simple et localisé sur une partie de sa longueur. La déformation est concentrée dans une zone qui entraîne la réduction de sa section et la diminution de la contrainte appliquée.

**La rupture :** La rupture intervient lorsque l'éprouvette casse au niveau de la zone de striction.

$\sigma_r$  ou  $R_r$  est la valeur limite de la contrainte avant la rupture, appelée aussi résistance à la rupture.

## Chapitre 3

### Torsion

Le torseur de cohésion dans une section droite s'écrit:

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

#### 3.1 Hypothèses de l'étude

Les poutres étudiées sont des cylindres de révolution à base circulaire.

Pour toute section qui n'est pas circulaire :

- les sections ne restent pas planes et se gauchissent,
- la contrainte de cisaillement ne peut pas être tangente au contour non circulaire de la section.

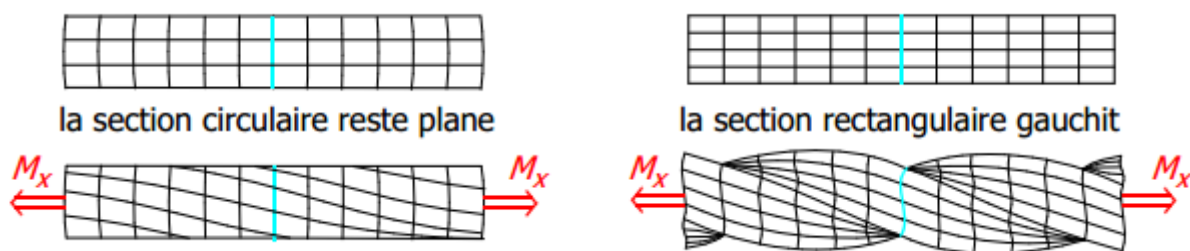


Figure 17 – Gauchissement d'une section droite non circulaire.

#### 3.2 Essai de torsion

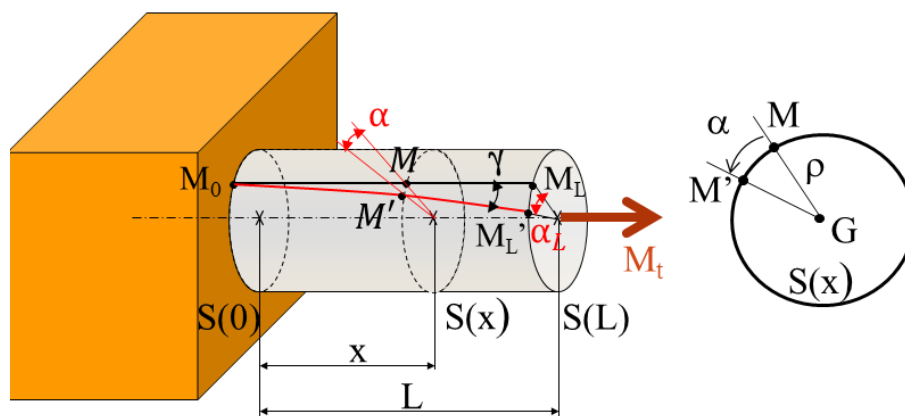


Figure 18 – Essai de torsion

Soit une poutre circulaire pleine, parfaitement encastrée en  $S(0)$  (section de référence), soumise à l'extrémité  $S(L)$  à un moment de torsion  $M_t$ .

### Constatations

Après déformation, On observe que :

Une génératrice  $M_0M_L$  devient une hélice  $M_0M'_L$  d'angle  $\gamma$ .

Chaque section droite  $S(x)$  subit une rotation  $\alpha(x)$  proportionnelle à sa distance  $x$  à la base  $S(0)$  :

$$\frac{\alpha(x)}{x} = \frac{\alpha_L}{L} = cte = \theta$$

$\gamma$  est l'angle de glissement ou distorsion (rad).

$\alpha$  est l'angle de torsion de  $S(x)/S(0)$ .

$\theta$  est l'angle unitaire de torsion (rad/mm).

$x$  est la distance entre  $S(x)$  et  $S(0)$  (mm)

La distorsion  $\gamma$  (HPD) est égale à :

$$\gamma = \frac{r\alpha}{x} = r\theta$$

### Graphe de l'essai de torsion

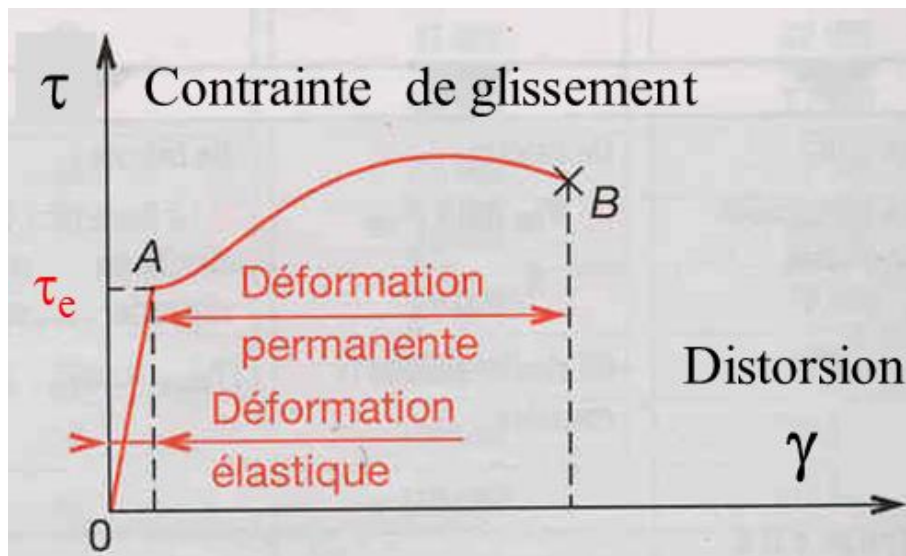


Figure 19 –Graphe de l'essai de torsion

- OA : domaine élastique, la distorsion  $\gamma$  est proportionnelle à la contrainte appliquée

$$\tau = G \gamma$$

$G$ : module de Coulomb

$\tau_e$  ou  $R_g$  est la limite élastique au cisaillement ou au glissement.

- AB : domaine plastique, la distorsion  $\gamma$  n'est plus proportionnelle à la contrainte appliquée

### 3.3 Champ de déplacements

Soit un cylindre de section circulaire, sous l'action du moment de torsion  $M_t$ .

On observe que les sections droites subissent des rotations proportionnelles à leur distance à la base  $S(0)$ .

Soit  $S(x)$  une section droite située à une distance  $x$  de  $S(0)$ .

$S(x)$  tourne d'un angle  $\alpha = \theta x$

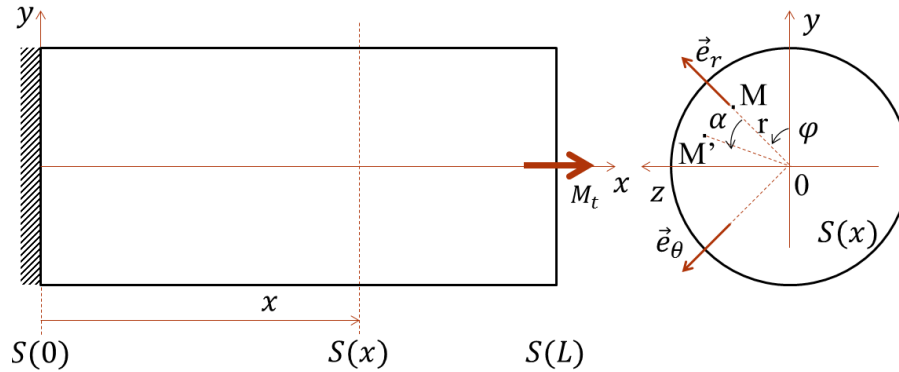


Figure 20 – Cylindre sous l'action du moment de torsion  $M_t$ .

Le point  $M(r, \varphi)$  de  $S(x)$  vient en  $M'(r, \varphi + \theta x)$  après déformation.

Le vecteur déplacement est :

$$\vec{u} = \overrightarrow{MM'} = r \alpha \vec{e}_\theta = r \theta x \vec{e}_\theta$$

On postule alors un champ de déplacement de la forme :

$$\vec{u} = r \theta x \vec{e}_\theta$$

Avec :

$$r \vec{e}_\theta = r(-\sin\varphi \vec{y} + \cos\varphi \vec{z}) = -z \vec{y} + y \vec{z}$$

Le champ de déplacement s'écrit alors :

$$\vec{u} = r \theta x \vec{e}_\theta = \theta x (-z \vec{y} + y \vec{z}) \quad 3.1$$

### 3.4 Contrainte tangentielle

Les déformations sont obtenues en dérivant les déplacements (équation 1.11) :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\theta}{2} \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} \quad 3.2$$

Les lois de comportement (1.13) permettent de trouver les contraintes :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & -G\theta z & G\theta y \\ -G\theta z & 0 & 0 \\ G\theta y & 0 & 0 \end{pmatrix}_{x,y,z} \quad 3.3$$

Le champ de contraintes vérifie les équations d'équilibre (équations 1.10).

La condition aux limites sur la surface latérale, libre en contraintes, est vérifiée. En effet :

$$\vec{n} = \vec{e}_r = \left( \frac{y}{R} \vec{y} + \frac{z}{R} \vec{z} \right) \quad \text{et} \quad \vec{T}(M, \vec{e}_r) = \vec{0}$$

La contrainte tangentielle dans une section droite, de facette  $\vec{x}$ , vaut :

$$\vec{T}(M, \vec{x}) = \vec{\tau} = G\theta(-z\vec{y} + y\vec{z}) = G\theta r \vec{e}_\theta \quad 3.4$$

Sur une section droite, on vérifie les efforts intérieurs (équations de 1.19 à 1.24) :

$$N = T_y = T_z = Mf_y = Mf_z = 0$$

$$\begin{aligned} M_t &= \int_S (y \tau_z - z \tau_y) ds = \int_S (G\theta y^2 + G\theta z^2) ds = G\theta \int_S (y^2 + z^2) ds = G\theta \int_S r^2 ds \\ &= G\theta I_G \end{aligned}$$

Ce champ de contraintes conduit à :

$$\vec{R} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{M}_G = M_t \vec{x} = G\theta I_G \vec{x} \quad 3.5$$

D'après les équations (3.4) et (3.5), la contrainte tangentielle s'écrit :

$$\tau = \frac{M_t}{I_G} r = \frac{M_t}{\left( \frac{I_G}{r} \right)} \quad 3.6$$

### Remarques

- La contrainte tangentielle  $\tau$  est une fonction linéaire du rayon  $r$ . Elle est nulle sur la ligne moyenne ( $r=0$ ) et maximale pour  $r = R$  et vaut :

$$\tau_{\text{maxi}} = \frac{M_t}{\left( \frac{I_G}{R} \right)} \quad 3.7$$

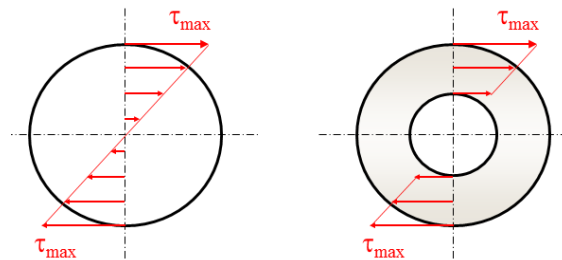


Figure 21 – Répartition linéaire de la contrainte de glissement dans la section droite.

$I_G$  est le moment quadratique de la section (S) par rapport à G ( $\text{mm}^4$ )

et  $\frac{I_G}{R}$  est le module de torsion ( $\text{mm}^3$ ) avec :

$$I_G = \int_S r^2 ds \quad 3.8$$

### 3.5 Déformations

D'après le torseur des taux de déformations (1.32), la déformation de torsion  $\theta$  s'écrit :

$$\theta = \frac{d\omega_x}{dx} = \frac{d\alpha}{dx}$$

Or d'après l'équation (3.4) :

$$\theta = \frac{\tau}{Gr}$$

Donc

$$\theta = \frac{M_t}{GI_G} \quad 3.9$$

$$\alpha = \theta x$$

Donc

$$\alpha = \frac{M_t}{GI_G} x \quad 3.10$$

## Chapitre 4

### Flexion pure

Le torseur de cohésion dans une section droite s'écrit :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_{f_z} \end{Bmatrix}_G \quad \text{Ou encore} \quad \{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{f_y} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Nous étudions ici  $M_{f_z}$ . L'étude de  $M_{f_y}$  est analogue à celle de  $M_{f_z}$ .

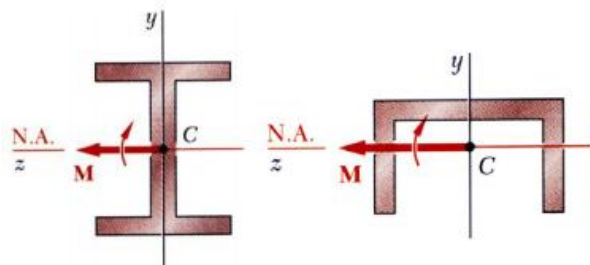


Figure 22 – flexion pure.

$M_{f_z} \neq 0$  et d'après l'équation (1.28) :

$$\sigma = -\frac{M_{f_z}}{I_{Gz}} y \quad \text{et} \quad \bar{\sigma} = \frac{M_{f_z}}{I_{Gz}} y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 4.1$$

#### Remarques

- La contrainte  $\sigma$  est plus petite pour les sections dont le moment quadratique est plus grand.
- La contrainte normale  $\sigma$  est une fonction linéaire de  $y$ . Elle est nulle sur la ligne moyenne ( $y=0$ ) et maximale pour  $y = y_{MAX}$  et elle est égale à :

$$\sigma_{MAX} = \frac{M_{f_{MAX}}}{I_{Gz}} y_{MAX} \quad 4.2$$

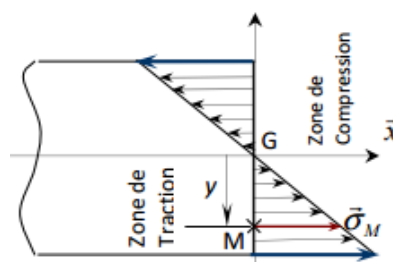


Figure 23 – Répartition linéaire des contraintes normales dans la section droite

#### 4.1 Déformations

Les déformations sont obtenues par les lois de comportement (1.13) :

$$\bar{\varepsilon} = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} y \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} \quad 4.3$$

#### 4.2 Champ de déplacements

Le champ de déplacements  $\vec{u}$  est obtenu en intégrant les déformations (1.11) :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_x = -\frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} xy + c_1 y + c_2 z + a \\ u_y = \frac{M_{fz}}{2EI_{Gz}} [x^2 + \nu(y^2 - z^2)] - c_1 x - c_3 z + b \\ u_z = \nu \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} yz - c_2 x + c_3 y + c \end{cases} \quad 4.4$$

Le vecteur rotation  $\vec{\omega}$  s'écrit en utilisant l'équation (1.12) :

$$\vec{\omega} = \begin{cases} \omega_x = \nu \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} z + c_1 \\ \omega_y = c_2 \\ \omega_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} x + c_3 \end{cases} \quad 4.5$$

Les constantes d'intégration  $c_1, c_2, c_3, a, b, c$  sont nuls dans le cas où la section  $S(0)$  est encastrée. On aura alors :

$$\vec{u} = \begin{cases} u_x = -\frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} xy \\ u_y = \frac{M_{fz}}{2EI_{Gz}} [x^2 + \nu(y^2 - z^2)] \\ u_z = \nu \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} yz \end{cases} \quad \vec{\omega} = \begin{cases} \omega_x = \nu \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} z \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} x \end{cases} \quad 4.6$$

#### 4.3 Déformée

La ligne moyenne ( $x, y=z=0$ ) devient après déformation :

$$u_x = u_z = 0 \quad \text{et} \quad u_y = y = \frac{M_{fz}}{2EI_{Gz}} x^2$$

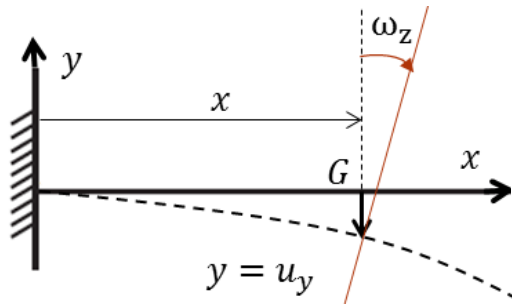


Figure 24 – Déformée sous la flexion



Figure 25 – Tronçon de poutre soumis à la flexion

La ligne moyenne ou déformée devient donc une parabole dont la courbure est :

$$\frac{1}{R} = \frac{\ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{3/2}} \approx \ddot{y}(x) \quad 4.7$$

Les sections droites  $S(x)$  et  $S(x+dx)$  tournent autour de l'axe  $z$  d'angles respectifs  $\omega_z$  et  $\omega_z + d\omega_z$ .

Le tronçon, de longueur  $dx$ , situé entre les sections  $S(x)$  et  $S(x+dx)$  devient un arc de cercle de rayon  $R$  et d'angle  $d\omega_z$ .

Sur l'arc de cercle, on écrit :

$$dx = R d\omega_z \quad \text{ou encore} \quad \frac{1}{R} = \frac{d\omega_z}{dx} \approx \ddot{y}(x)$$

Or d'après le torseur des taux de déformations (1.32), la déformation de flexion  $\gamma_z$  s'écrit :

$$\frac{d\omega_z}{dx} = \gamma_z \approx \ddot{y}(x)$$

En dérivant  $\omega_z$  (équation 4.5) par rapport à  $x$ , on obtient :

$$\gamma_z = \frac{M_{fz}}{EI_{Gz}} \approx \ddot{y}(x) \quad \text{ou encore} \quad M_{fz} = E I_{Gz} \ddot{y} \quad 4.8$$

C'est l'équation de la déformée. Il faut alors procéder à deux intégrations successives pour trouver  $y(x)$ .

Les constantes d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites aux liaisons.

|              |         |          |
|--------------|---------|----------|
| Appui simple | $y = 0$ |          |
| Encastrement | $y = 0$ | $y' = 0$ |

Tableau 4.Exemples de conditions aux limites :

**Remarques**

- Les expressions des contraintes et déformations ont été établies par rapport aux axes principaux d'inertie  $Gz$  et  $Gy$  et l'application des charges extérieures se fait dans le plans  $(x,y)$ .
- Les poutres étudiées sont à plan moyen, c'est-à-dire qu'elles offrent un plan de symétrie. Les plans principaux d'inertie sont donc identifiés facilement.
- Les sections restent symétriques et fléchissent dans le plan de symétrie.
- L'axe neutre de la section (de contraintes nulles) coïncide avec l'axe du moment de flexion.

# Chapitre 5

## Flexion plane simple

Le torseur de cohésion dans une section droite s'écrit:

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mf_z \end{Bmatrix}_G \quad \text{Ou encore} \quad \{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mf_y \\ T_y & 0 \end{Bmatrix}_G$$

Nous étudions ici le cas ( $T = T_y$  et  $Mf_z$ ). L'étude de ( $T_z$  et  $Mf_y$ ) se fait de la même façon.

La flexion simple est une flexion pure associée à un cisaillement. En plus de la contrainte normale provoquée par le moment de flexion, existe une contrainte de cisaillement provoquée par l'effort tranchant.

Le cisaillement est de deux types : le cisaillement transversal et le cisaillement longitudinal.

### 5.1 Cisaillement transversal

Sur une poutre (E) parfaitement encastree, on applique un effort de cisaillement T distant de  $\Delta x$  du plan (S0) d'encastrement.

On se rapproche des conditions de cisaillement réel lorsque  $\Delta x$  tend vers 0.

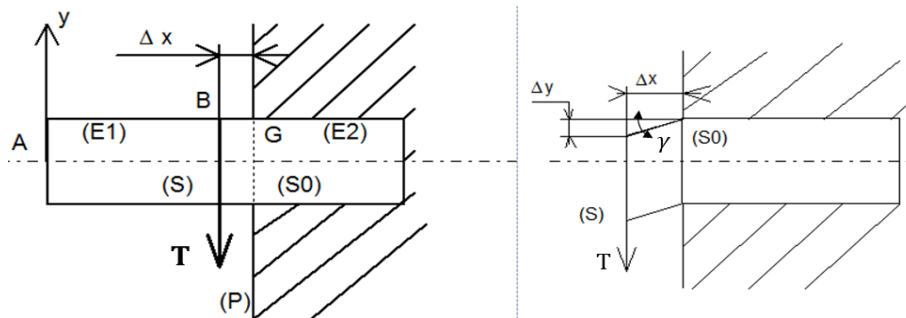


Figure 26 – Mise en évidence expérimentale des contraintes tangentielles transversales.

La contrainte tangentielle  $\tau_{yx}$  notée  $\tau$  est sur le plan de la section cisillée.

On définit la contrainte tangentielle moyenne par :

$$\tau_{Moy} = \frac{T}{S} \quad 5.1$$

Dans le domaine élastique, la déformation ou le glissement relatif  $\gamma$  s'écrit :

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \gamma \approx \gamma \quad 5.2$$

La déformation est proportionnelle à la contrainte appliquée. La relation de proportionnalité s'écrit :

$$\tau = G \gamma \quad \text{Ou encore} \quad \varepsilon_y = \frac{T}{G S} \quad 5.3$$

## 5.2 Cisaillement longitudinal

On considère deux poutres de sections globales identiques, faites d'un même matériau, soumises au même chargement. Une des deux poutres est composée d'un empilement de barres.

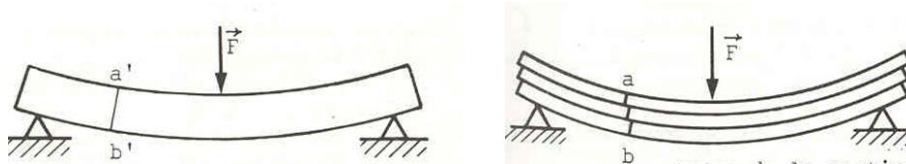


Figure 27 – Mise en évidence expérimentale des contraintes tangentielles longitudinales.

Après le chargement, on constate :

- Un glissement longitudinal des éléments constituant la poutre composée.
- La poutre composée fléchit plus que la poutre monobloc.

On déduit que :

En plus de la contrainte tangentielle transversale  $\tau_{yx}$  existant dans le plan des sections droites  $(z;y)$ , existent aussi des contraintes tangentielles longitudinales  $\tau_{xy}$  dans les plans parallèles au plan moyen  $(z;x)$ . Avec :

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$$

### Expression de la contrainte tangentielle

Considérons une poutre en flexion simple et soit un tronçon élémentaire de la poutre  $SS'$  de longueur  $dx$ .

Étudions l'équilibre du prisme élémentaire  $ABCA'B'C'$  dont le plan  $ABA'B'$  est d'ordonnée  $y$ .

$\tau(y)$  est la contrainte de cisaillement :

- Contrainte de cisaillement longitudinale agissant dans le plan  $ABA'B'$  d'aire  $= b(y)dx$
- Et contrainte de cisaillement transversale dans les cordes  $AB$  et  $A'B'$  des sections  $S$  et  $S'$  d'ordonnée  $y$  et de longueur  $b(y)$ .

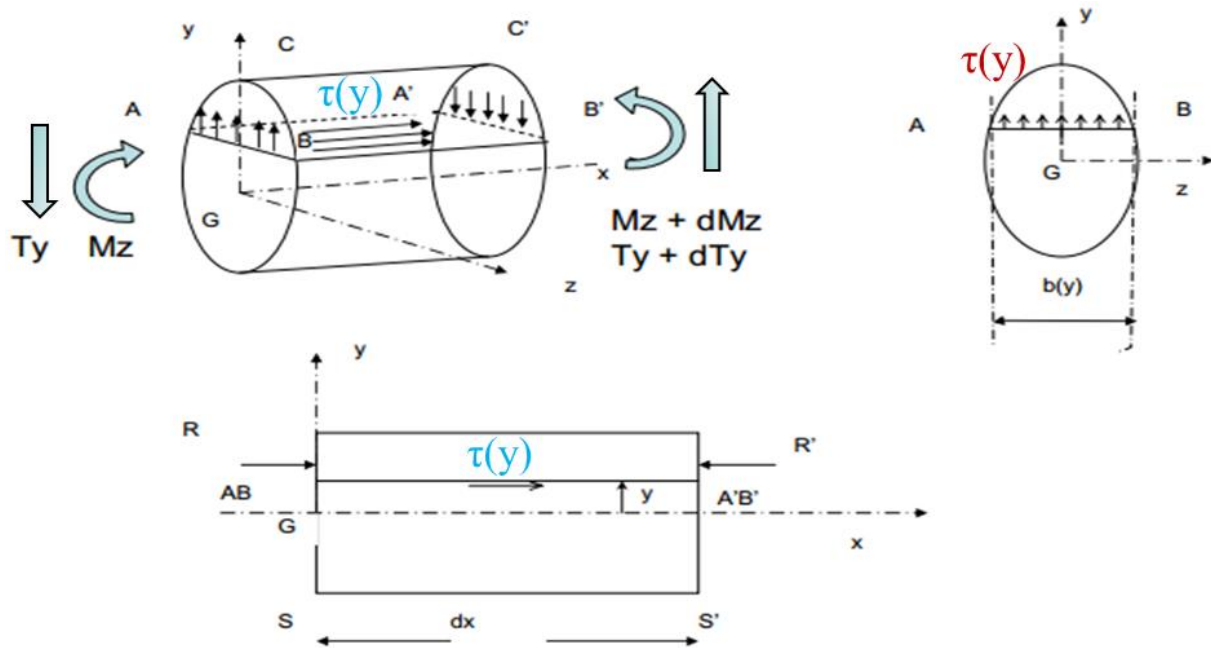


Figure 28 Equilibre d'un prisme élémentaire de poutre.

Bilan forces issues des contraintes qui s'exercent sur ABC et A'B'C' suivant Gx :

Sur S : 
$$R = \iint_{ABC} \sigma ds = -\frac{M}{I_{Gz}} \iint_{ABC} Y ds = -\frac{M}{I_{Gz}} m(y)$$

Sur S : 
$$R' = -\frac{M'}{I'_{Gz}} m'(y) = -\frac{M'}{I_{Gz}} m(y)$$

Sur ABA'B' : 
$$R'' = \tau(y) \text{Aire}(ABA'B') = \tau(y)b(y)dx$$

Les moments statiques  $m'(y) = m(y)$  et les moments quadratiques  $I'_{Gz} = I_{Gz}$  car les sections  $S(A'B'C') = S(ABC)$ .

La résultante des contraintes suivant Gx est nulle :  $R + R' + R'' = 0$  donne :

$$-\frac{M}{I_{Gz}} m(y) - \frac{M'}{I_{Gz}} m(y) + \tau(y)b(y)dx = 0$$

Sachant que (équation 1.5) :

$$T = -\frac{dM}{dx}$$

On trouve en fin :

$$\tau(y) = -\frac{T}{I_{Gz}} \frac{m(y)}{b(y)} \quad 5.4$$

$\tau(y)$  est la contrainte de cisaillement agissant le long de la corde AB de la section S, d'ordonnée y et de longueur b(y).

T : Effort tranchant dans la section S(x),

$m(y)$  : moment statique de la partie  $S(y)$  de la section totale  $S(x)$  située au-dessus de l'ordonnée  $y$ .

$I_{Gz}$  : Moment quadratique de la section totale  $S(x)$

### Facteur de forme en cisaillement

On définit le facteur de forme en cisaillement  $\lambda$  tel que :

$$\tau_{Max} = \lambda. \tau_{Moy} = \lambda. \frac{T}{S} \quad 5.5$$

| Type de section  |                                                                                    | Facteur de forme                                       |
|------------------|------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|
| Cercle plein     |   | $\frac{4}{3}$                                          |
| Cercle creux     |   | $\frac{4}{3} \left[ 1 + \frac{R r}{R^2 + r^2} \right]$ |
| rectangle        |   | $\frac{3}{2}$                                          |
| Losange régulier |  | $\frac{9}{8}$                                          |

Tableau 5. Quelques valeurs de  $\lambda$ .

### 5.3 Comparaison entre les contraintes normale et tangentielle

Ordre de grandeur des contraintes :

| Contrainte tangentielle                             | Contrainte normale                                                           | Rapport des contraintes :                                         |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| $\bar{\tau} = \frac{T}{a^2}$                        | $\bar{\sigma} = \frac{Mf}{a^3} = \frac{TL}{a^3}$                             | $\frac{\bar{\tau}}{\bar{\sigma}} = \frac{a}{L}$                   |
| $a$ est une dimension caractéristique de la section | $\overline{Mf} = TL$ car $(dMf = -Tdx)$<br>$L$ est la longueur de la poutre. | Rapport faible pour une poutre (voir hypothèses sur les poutres). |

Le rapport des contraintes est faible pour une poutre dont la longueur est beaucoup plus grande par rapport aux dimensions transversales (voir hypothèses sur les poutres).

En général, une poutre sollicitée à la flexion simple est plus sensible aux contraintes normales qu'aux contraintes tangentielles. Donc le calcul se fera selon la contrainte normale.

## 5.4 Structures hyperstatiques

### Exemple 1

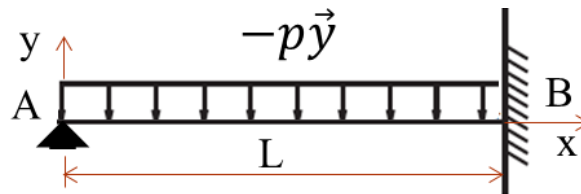


Figure 29 Exemple d'une structure hyperstatique.

Déterminer les actions en A et B:

Le PFS appliqué à cette structure permet d'écrire les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B = pL \\ M_B = p \frac{L^2}{2} \end{cases}$$

Le nombre d'équation ( $p=3$ ) est insuffisant pour déterminer les inconnues de liaisons ( $n=4$ ) en A et B.

$$h = n - p = 1 > 0$$

$h$  est le degré d'hyperstatisme.

Le système est hyperstatique d'ordre 1. Il faudra introduire de nouvelles équations (de déformation) résoudre le problème.

### Méthodes de résolution de structures hyperstatiques

- Équations de déformation supplémentaires,
- Principe de superposition des effets de forces,
- Formules de Bresse : voir chapitre **Erreur ! Source du renvoi introuvable. Erreur ! Source du renvoi introuvable.**
- Méthodes énergétiques : voir chapitre Chapitre 7 Théorèmes énergétiques.

#### 5.4.1 Equations de déformation supplémentaire

##### Etapes à suivre pour résoudre l'exemple 1 :

1. Appliquer le PFS pour trouver les actions aux liaisons.
2. Trouver les équations du moment de flexion.
3. Etablir l'équation de la déformée  $y(x)$ .
4. Trouver les équations manquantes en écrivant les conditions aux limites.
5. Dédire les actions aux liaisons.

### 5.4.2 Principe de superposition des effets de forces

#### Enoncé

L'effet produit par plusieurs forces extérieures est égal à la somme des effets produits par ces forces prises séparément.

Dans ce cas : l'étude d'un système hyperstatique se ramène à la superposition, de deux (ou plusieurs) systèmes isostatiques 1 et 2.

#### Exemple

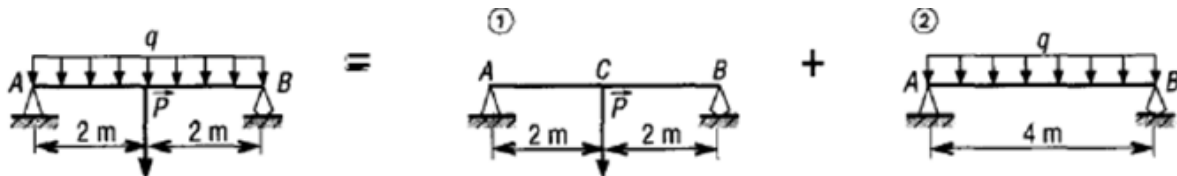


Figure 30 Principe de superposition des effets de forces.

#### Conséquences

|                           |                                                                               |                    |                                                            |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------|------------------------------------------------------------|
| <b>Efforts extérieurs</b> | $P = P_1 + P_2$<br>$q = q_1 + q_2$                                            | <b>Contraintes</b> | $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$<br>$\tau = \tau_1 + \tau_2$ |
| <b>Actions des appuis</b> | $Y_A = Y_{A1} + Y_{A2}$<br>$Y_B = Y_{B1} + Y_{B2}$<br>$M_B = M_{B1} + M_{B2}$ | <b>Déformée</b>    | $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$                                   |
| <b>Effort tranchant</b>   | $T = T_1 + T_2$                                                               | <b>Flèche</b>      | $f = f_1 + f_2$                                            |
| <b>Moment de flexion</b>  | $M_f = M_{f1} + M_{f2}$                                                       | <b>Rotation</b>    | $\theta = \theta_1 + \theta_2$                             |

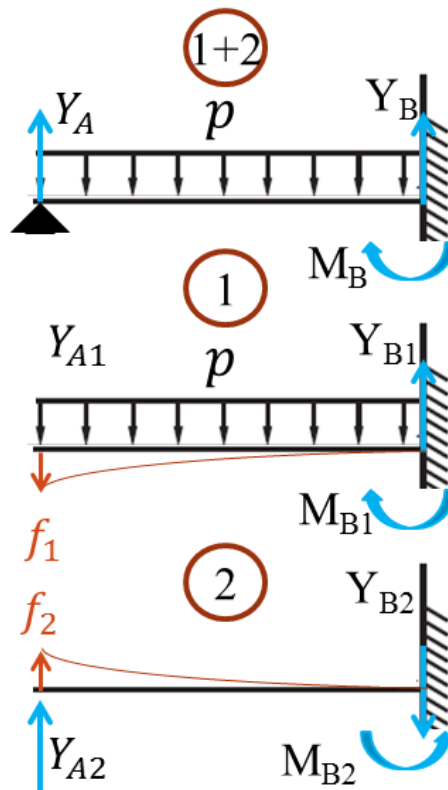
#### Méthode de résolution

Utiliser l'équation  $f = f_1 + f_2$  pour trouver les actions des appuis

#### Etapes à suivre pour résoudre l'exemple 1

| SYST | APPUI A        | APPUI B            |                            | FLECHE EN A                   |
|------|----------------|--------------------|----------------------------|-------------------------------|
| 1    | $Y_{A1} = 0$   | $Y_{B1} = pL$      | $M_{B1} = -\frac{pL^2}{2}$ | $f_1 = -\frac{pL^4}{8EI}$     |
| 2    | $Y_{A2} = Y_A$ | $Y_{B2} = -Y_{A2}$ | $M_{B2} = Y_{A2}L$         | $f_2 = \frac{Y_{A2}L^3}{3EI}$ |

|     |                         |                         |                         |                       |
|-----|-------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|
| 1+2 | $Y_A = Y_{A1} + Y_{A2}$ | $Y_B = Y_{B1} + Y_{B2}$ | $M_B = M_{B1} + M_{B2}$ | $f = f_1 + f_2 = 0$   |
|     | $Y_A = \frac{3}{8}pL$   | $Y_B = \frac{5}{8}pL$   | $M_B = -\frac{pL^2}{8}$ | $Y_A = \frac{3}{8}pL$ |

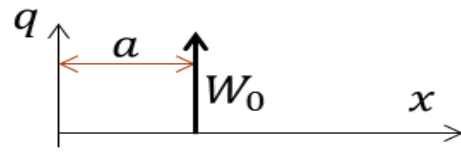
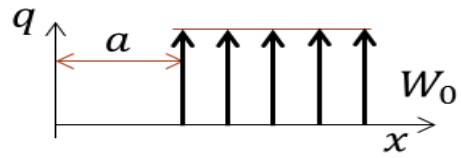
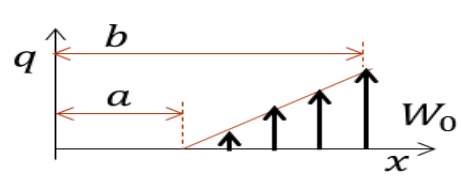
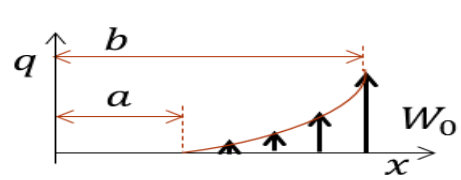


### 5.4.3 Technique des fonctions de singularité

C'est une technique basée sur les fonctions de singularités à domaines limité, utilisée pour déterminer la déformée en flexion d'une poutre à plusieurs zones d'étude.

#### Principales fonctions de singularité

| Cas | Fonction de base $q(x)$                  | Effort tranchant $T(x)$ et Moment de flexion $Mf(x)$ |
|-----|------------------------------------------|------------------------------------------------------|
|     | $q(x) = -M_0 \langle x - a \rangle^{-2}$ | $Mf(x) = -M_0 \langle x - a \rangle^0$               |

|                                                                                   |                                                      |                                                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | $q(x) = W_0 \langle x - a \rangle^{-1}$              | $T(x) = -W_0 \langle x - a \rangle^0$<br>$Mf(x) = W_0 \langle x - a \rangle^1$                                    |
|  | $q(x) = W_0 \langle x - a \rangle^0$                 | $T(x) = -W_0 \langle x - a \rangle^1$<br>$Mf(x) = W_0 \frac{\langle x - a \rangle^2}{2}$                          |
|  | $q(x) = \frac{W_0}{(b-a)} \langle x - a \rangle^1$   | $T(x) = -\frac{W_0}{2(b-a)} \langle x - a \rangle^2$<br>$Mf(x) = \frac{W_0}{6(b-a)} \langle x - a \rangle^3$      |
|  | $q(x) = \frac{W_0}{(b-a)^2} \langle x - a \rangle^2$ | $T(x) = -\frac{W_0}{3(b-a)^2} \langle x - a \rangle^3$<br>$Mf(x) = \frac{W_0}{12(b-a)^2} \langle x - a \rangle^4$ |

### Propriétés

$$n \geq 0 \quad \langle x - a \rangle^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ (x - a)^n & \text{si } x > a \end{cases} \quad \text{et} \quad \int P \langle x - a \rangle^n dx = P \frac{\langle x - a \rangle^{n+1}}{n+1} + C_m$$

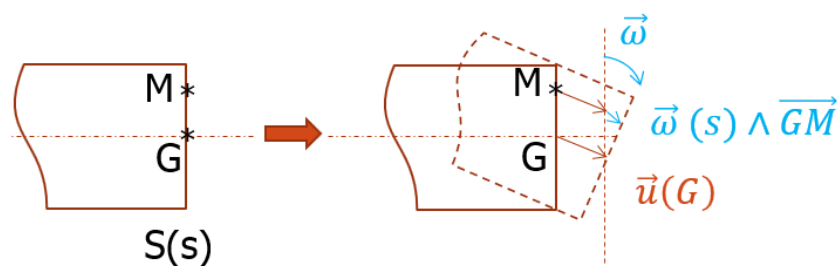
$$n = -1 \quad \langle x - a \rangle^{-1} = 0 \quad \text{et} \quad \int P \langle x - a \rangle^{-1} dx = P \langle x - a \rangle^0 + C_m = C_m + \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$$

$$n = -2 : \quad \langle x - a \rangle^{-2} = 0 \quad \text{et} \quad \int P \langle x - a \rangle^{-2} dx = P \langle x - a \rangle^{-1} + C_m = C_m + 0$$

### 5.5 Formules de Bresse

#### Rappel : Torseur des petits déplacements et Torseur des taux de déformations

Considérons la section droite  $S(s)$ , d'abscisse curviligne  $s$ , de centre  $G$  et normale aux fibres d'une poutre.

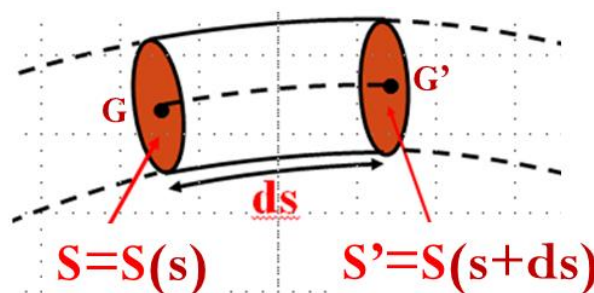
Figure 31 – Cinématique d'une section droite  $S(s)$  normale aux fibres.

L'hypothèse de Navier & Bernoulli permet d'assimiler la cinématique d'une section droite ( $S$ ) normale aux fibres au mouvement d'un corps solide (pas de déformation transverse possible).

Le torseur de petits déplacements au centre de gravité  $G$  de la section ( $S$ ) s'écrit alors :

$$\{dep S/R\}_G = \begin{cases} \vec{\omega}(s) = \omega_t(s)\vec{t} + \omega_n(s)\vec{n} + \omega_b(s)\vec{b} \\ \vec{u}_G(s) = u_t(s)\vec{t} + u_n(s)\vec{n} + u_b(s)\vec{b} \end{cases}_G$$

Considérons une tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ , comprise entre les sections droites voisines :  $S$  (d'abscisse curviligne  $s$  et de centres  $G$ ) et  $S'$  (d'abscisse curviligne  $s + ds$  et de centres  $G'$ ).

Figure 32 –Tranche élémentaire de poutre de longueur  $ds$ .

Le torseur des taux de déformation est par définition :

$$\{Def S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(s) \\ \vec{\varepsilon}(s) \end{Bmatrix}_G = \frac{\{dep S'/R\}_G - \{dep S/R\}_G}{ds} = \frac{d}{ds} \{dep S/R\}_G$$

Le torseur de taux de déformation s'écrit alors :

$$\{Def S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(s) = \gamma_t\vec{t} + \gamma_n\vec{n} + \gamma_b\vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t\vec{t} + \varepsilon_n\vec{n} + \varepsilon_b\vec{b} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \\ \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{\omega} \end{Bmatrix}_G \quad 5.6$$

$\vec{\varepsilon}(s)$  est le vecteur dilatation ou allongement relatif et  $\vec{\gamma}(s)$  est le vecteur glissement ou distorsion. Les déformations des différentes sollicitations sont regroupées dans les relations ci-dessous :

| Déformation | Sollicitation | 5.7 |
|-------------|---------------|-----|
|-------------|---------------|-----|

|                                              |                       |  |
|----------------------------------------------|-----------------------|--|
| $\varepsilon_t = \varepsilon = \frac{N}{ES}$ | Traction- compression |  |
| $\varepsilon_n = \frac{T_n}{GS}$             | Cisaillement          |  |
| $\varepsilon_b = \frac{T_b}{GS}$             |                       |  |
| $\gamma_t = \theta = \frac{Mt}{GI_G}$        | Torsion               |  |
| $\gamma_n = \ddot{y}_n = \frac{Mf_n}{EI_n}$  | Flexion simple        |  |
| $\gamma_b = \ddot{y}_b = \frac{Mf_b}{EI_b}$  |                       |  |

Le torseur des taux de déformation s'écrit enfin en fonction des efforts intérieurs :

$$\{Def\ S/R\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\gamma}(s) = \frac{Mt}{GI_G} \vec{t} + \frac{Mf_n}{EI_n} \vec{n} + \frac{Mf_b}{EI_b} \vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \frac{N}{ES} \vec{t} + \frac{T_n}{GS} \vec{n} + \frac{T_b}{GS} \vec{b} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{l} \frac{Mt}{GI_G} \quad \frac{N}{ES} \\ \frac{Mf_n}{EI_n} \quad \frac{T_n}{GS} \\ \frac{Mf_b}{EI_b} \quad \frac{T_b}{GS} \end{array} \right\}_G \quad 5.8$$

### Formules de Bresse

Soit une poutre curviligne, définie par sa ligne moyenne  $G_1G_2$  et soit le repère de Frenet  $R(G, t, n, b)$ , lié à la ligne moyenne  $G_1G_2$ .

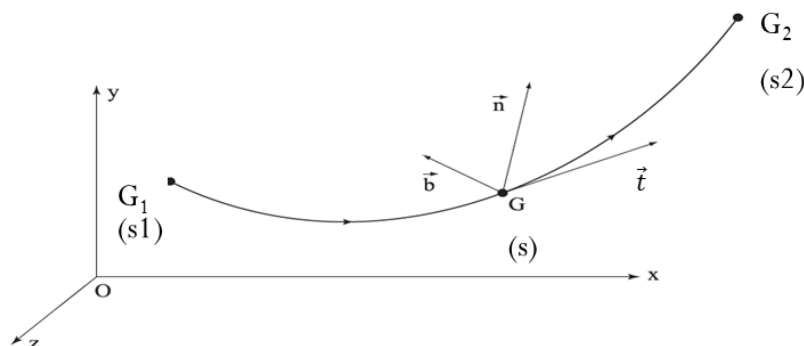


Figure 33 – Poutre définie par sa ligne moyenne  $G_1G_2$  et le repère de Frenet défini en  $G$ .

Si on intègre les deux éléments du torseur des petits déplacements (5.6) entre les points  $G_1$  et  $G_2$ , on retrouve les deux formules de Bresse :

$$\vec{\omega}_{(G2)} = \vec{\omega}_{(G1)} + \int_{G1}^{G2} \vec{\gamma}(s) ds \quad 1\text{FB}$$

5.9

$$\vec{u}_{(G2)} = \vec{u}_{(G1)} + \vec{\omega}_{(G1)} \wedge \overrightarrow{G_1 G_2} + \int_{G1}^{G2} \vec{\varepsilon}(s) dS + \int_{G1}^{G2} \vec{\gamma}(s) \wedge \overrightarrow{G G_2} dS \quad 2\text{FB}$$

**Intérêt :**

Les Formules de Bresse, permettent de calculer les déplacements et les actions de liaisons pour :

- Des problèmes dont les sollicitations sont simples ou composées.
- Des problèmes hyperstatiques.
- Des poutres de ligne moyenne non rectiligne.
- Des problèmes 3D,

## Chapitre 6

### Flexion déviée

Le torseur de cohésion dans une section droite s'écrit:

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & Mf_y \\ T_z & Mf_z \end{Bmatrix}_G$$

La flexion déviée est définie comme une combinaison de deux flexions planes simples autour des deux axes principaux de la section de la poutre. Elle se produit lorsque le moment de flexion est appliqué en dehors des axes principaux de la section GZ, GY.

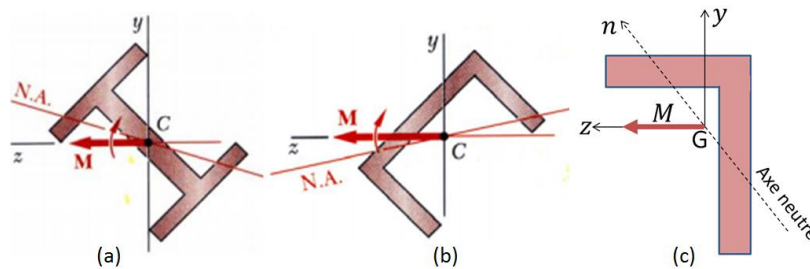


Figure 34 –flexion déviée : chargement en dehors des axes principaux d'inertie.

En général, l'axe neutre de la section ne coïncide pas avec l'axe du moment de flexion.

Pour calculer les valeurs des contraintes normales, il faut :

- Rechercher la position des axes principaux d'inertie,
- Puis décomposer le moment de flexion appliqué sur les axes principaux,
- Et enfin exprimer les valeurs des contraintes normales.

#### 6.1 Axes principaux de la section (GZ et GY) (Rappel)

La position de l'axe principal GZ est défini, par rapport à l'axe Gz par l'angle  $\theta$  tel que :

$$\tan 2\theta = \frac{2 I_{Gyz}}{I_{Gz} - I_{Gy}}$$

Les moments quadratiques dans le repère principal (G,Y,Z) se calculent en fonction des moments quadratiques dans le repère (G,y,z) par :

$$I_{GZ} = I_{max} = \frac{I_{Gy} + I_{Gz}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Gy} - I_{Gz})^2 + 4 I_{Gyz}^2}$$

$$I_{GY} = I_{min} = \frac{I_{Gy} + I_{Gz}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(I_{Gy} - I_{Gz})^2 + 4 I_{Gyz}^2}$$

6.1

**Remarque**

Le calcul des moments quadratiques dans le repère principal (G,Y,Z) en fonction des moments quadratiques dans le repère (G,y,z) peut se faire d'une façon graphique en utilisant le cercle de Mohr.

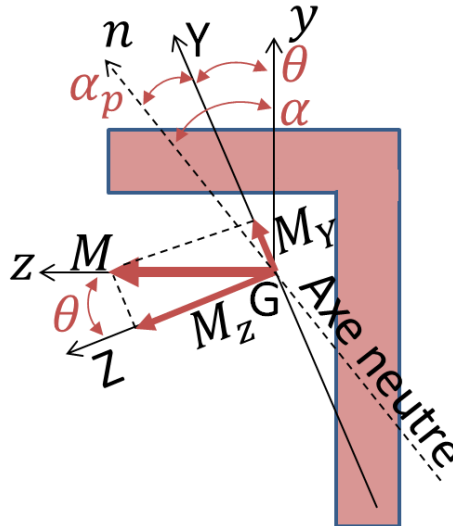


Figure 35 –Section d'une poutre en flexion déviée.

**6.2 Expression dans le repère principal (G,Y,Z)****Contrainte normale**

Prenons le cas d'une poutre de section S quelconque ou le moment de flexion  $M\vec{z}$  est appliqué en dehors des axes principaux de la section GZ, GY. La poutre est soumise à de la flexion déviée

Nous avons :

$$M_Y = M \sin\theta$$

$$M_Z = M \cos\theta$$

Et la contrainte normale s'écrit d'après l'équation (1.28) :

$$\sigma = -\frac{M_Z}{I_{GZ}}Y + \frac{M_Y}{I_{GY}}Z \quad 6.2$$

Les déformations dues aux flexions dans les deux directions sont définies respectivement par les expressions suivantes:

$$EI_{GZ} \frac{d^2Y}{dx^2} = M_Z \quad EI_{GY} \frac{d^2Z}{dx^2} = -M_Y \quad 6.3$$

La contrainte normale s'exprime donc :

$$\sigma = -\frac{M_Z}{I_{GZ}}Y + \frac{M_Y}{I_{GY}}Z = -M \left( \frac{Y \cos\theta}{I_{GZ}} - \frac{Z \sin\theta}{I_{GY}} \right) = -\frac{M}{I_{GY}I_{GZ}} (Y I_{GY} \cos\theta - Z I_{GZ} \sin\theta) \quad 6.4$$

**Axe neutre (G, n)**

La contrainte est nulle sur l'axe neutre, ce qui permet d'écrire d'après l'équation (6.4) :

$$Y I_{GY} \cos\theta - Z I_{GZ} \sin\theta = 0 \quad \text{Ou encore :} \quad \tan \alpha_p = \frac{Z}{Y} = \frac{I_{GY}}{I_{GZ}} \frac{1}{\tan \theta} \quad 6.5$$

Connaissant la direction du moment de flexion M et les axes principaux (angle  $\theta$ ), on peut déterminer la direction de l'axe neutre (angle  $\alpha_p$ ).

D'après l'hypothèse de Bernoulli, la section droite S restera droite après déformation. Elle fera une rotation autour de l'axe neutre (G, n). Les déformations  $\varepsilon_x$  et la contrainte normale  $\sigma$  seront donc maximales pour les points M(Y, Z) les plus éloignés de l'axe neutre (G, n).

**6.3 Expression dans le repère (G,y,z)****Axe neutre**

Le passage entre les repères (G, x, y, z) et (G, x, Y, Z) se font par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} y &= Y \cos\theta - Z \sin\theta & z &= Y \sin\theta + Z \cos\theta \\ Y &= y \cos\theta + z \sin\theta & Z &= -y \sin\theta + z \cos\theta \end{aligned}$$

Les moments quadratiques du repère (G, x, y, z) s'écrivent en fonction des moments quadratiques principaux du repère (G, x, Y, Z) :

$$\begin{aligned} I_{Gy} &= I_{GZ} \sin^2\theta + I_{GY} \cos^2\theta \\ I_{Gz} &= I_{GZ} \cos^2\theta + I_{GY} \sin^2\theta \\ I_{Gyz} &= (I_{GZ} - I_{GY}) \sin\theta \cos\theta \end{aligned}$$

L'équation (6.5) devient :

$$y I_{Gy} - z I_{Gyz} = 0 \quad \text{Ou encore :} \quad \tan \alpha = \frac{z}{y} = \frac{I_{Gy}}{I_{Gyz}} \quad 6.6$$

**Contrainte normale**

La contrainte normale équation (6.4) devient donc :

$$\sigma = -\frac{M}{I_{GY} I_{GZ}} (y I_{Gy} - z I_{Gyz}) \quad 6.7$$

La contrainte normale  $\sigma$  est maximale pour les points M(y, z) les plus éloignés de l'axe neutre (G, n).

## Chapitre 7

### Théorèmes énergétiques

#### 7.1 Par définition :

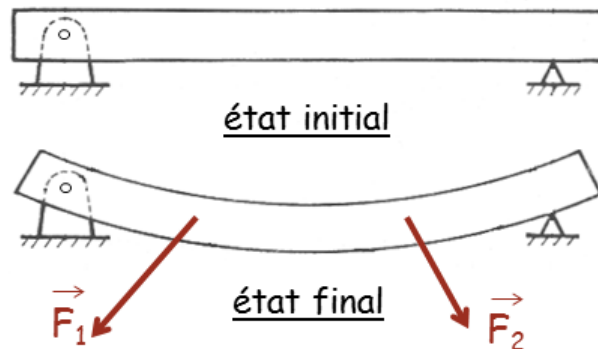


Figure 36 –Déformation élastique d'une poutre

Énergie de déformation :

$$W_d = -W_{int} = W_{ext} \quad 7.1$$

$W_d$  est l'énergie de déformation,  $W_{int}$  est le travail des efforts intérieurs de cohésion et  $W_{ext}$  est le travail des efforts extérieurs.

#### 7.2 Travaux des efforts extérieurs

##### Première formule de Clapeyron

Considérons un corps élastique soumis à un système de  $n$  forces  $P_i$  agissant aux points  $A_i$  leur imposant des déplacements  $\delta_i$

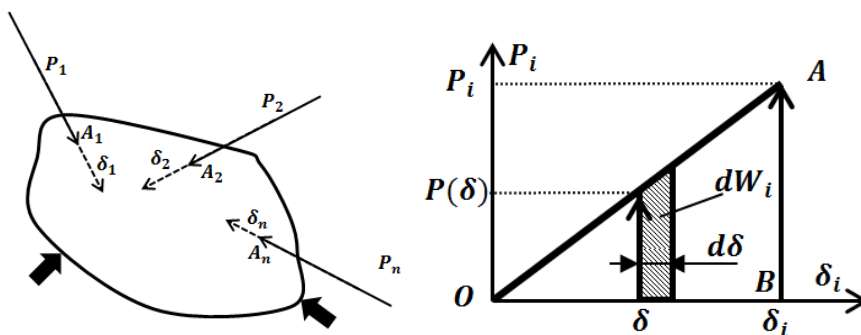


Figure 37 –Corps élastique soumis à un système de  $n$  forces  $P_i$

Le travail élémentaire fournit par chaque force  $P_i$  :  $dW_i = P(\delta)d\delta$

Le travail total fournit par chaque force  $P_i$  est l'air total du triangle OAB :

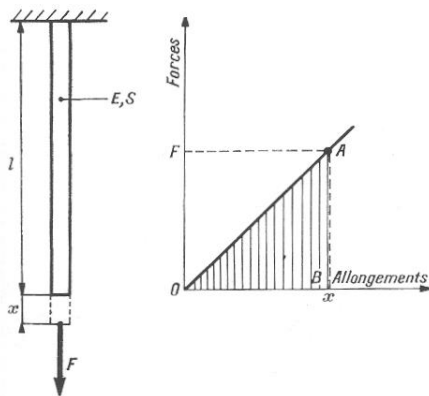
$$W_i = \frac{1}{2} P_i \delta_i \quad 7.2$$

Le travail total fournit par l'ensemble des forces  $P_i$  :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad 7.3$$

C'est la première formule de Clapeyron

### Exemple1 : Sollicitation de traction



#### Hypothèses :

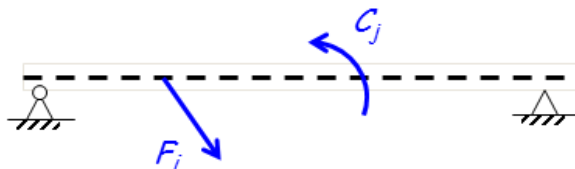
- Effort de traction  $F$  variable de 0 à  $F$
- Proportionnalité entre l'effort et l'allongement

Le travail de l'effort de traction est l'aire du triangle OAB :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} F \cdot x$$

Figure 38 –Poutre sollicitée à la traction.

### Exemple2 : Sollicitation quelconque



$$W_{ext} = \frac{1}{2} F_i U_i + \frac{1}{2} C_i \theta_i$$

$(U_i, \theta_i)$  sont les déplacements et rotation dus à  $(F_i, C_i)$ .

Figure 39 –Poutre avec une sollicitation quelconque.

### Seconde formule de Clapeyron

Considérons un corps élastique subissant un système de  $n$  forces  $P_i \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  appliqués aux points  $A_i \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  causant les déplacements  $\delta_i \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ .

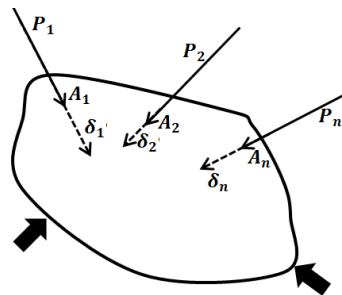


Figure 40 –Corps élastique soumis à un système de  $n$  forces  $P_i$

- Lorsque la force  $P_1$  est appliquée en  $A_1$ , le déplacement en  $A_1$  est

$$\delta_1 = \delta_{11}$$

- Si en plus de la force  $P_1$  en  $A_1$ , on applique la force  $P_2$  en  $A_2$ ,

Le déplacement en  $A_1$  est :

$$\delta_1 = \delta_{11} + \delta_{12}$$

Et le déplacement en  $A_2$  est :

$$\delta_2 = \delta_{21} + \delta_{22}$$

- Si l'ensemble de toutes les forces  $P_i$  est appliquée, le déplacement de tout point  $A_i$  s'écrit :

$$\delta_i = \delta_{i1} + \delta_{i2} + \dots + \delta_{ij} + \dots + \delta_{in} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij}$$

$\delta_{ij}$  est la contribution de la force  $P_j$  au déplacement du point  $A_i$  dans la direction de  $P_i$

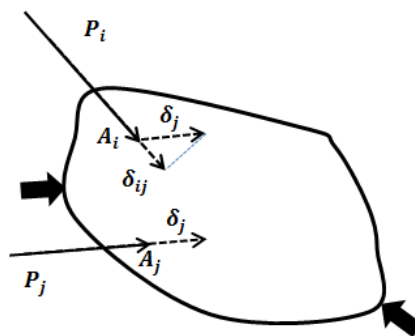


Figure 41 –Contribution de la force  $P_j$  au déplacement du point  $A_i$  dans la direction de  $P_i$

La proportionnalité entre forces et déplacements permet d'écrire :

$$\delta_i = a_{i1}P_1 + a_{i2}P_2 + \dots + a_{ij}P_j + \dots + a_{in}P_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}P_j$$

$a_{ij}$  est le coefficient d'influence : il représente la projection sur la direction  $P_i$  appliquée au point  $A_i$  du déplacement provoqué en ce point par une force unité appliquée au point  $A_j$  dans la direction de  $P_j$

D'après la première formule de **Clapeyron** (7.3), on peut écrire la seconde forme de la formule de **Clapeyron** :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}P_iP_j \quad 7.4$$

### 7.3 Énergie de déformation

#### Cas de la traction

Soit une poutre sollicitée à la force de traction  $N$  et soit le tronçon de poutre de longueur  $dx$  et qui s'allonge d'une quantité  $du$ .

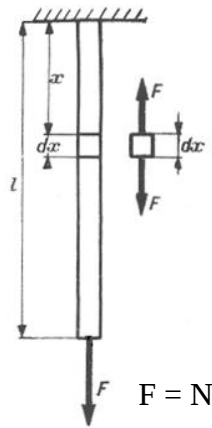


Figure 42 –Tronçon de poutre de longueur dx sollicité à la force de traction N

La loi de Hooke (2.4), s'écrit pour le tronçon :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{N}{ES} \quad \text{Ou encore :} \quad du = \frac{N \cdot dx}{ES}$$

L'énergie de déformation élémentaire du tronçon dx est donc d'après l'équation (7.2) :

$$dW_d = \frac{1}{2} N \cdot du = \frac{N^2}{2ES} \cdot dx$$

L'énergie de déformation totale s'obtient en intégrant sur toute la poutre :

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} dx = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma \varepsilon S dx = \frac{1}{2} \int_0^L \{\tau_c\}_G \cdot \{Def\}_G dx$$

**Cas général :**

$$W_d = \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \cdot S dx = \frac{1}{2} \int_0^L \{\tau_c\}_G \cdot \{Def\}_G dx \quad 7.5$$

Cette équation devient en introduisant les expressions du torseur de cohésion (équation 1.2) et du torseur des petites déformations (1.19) :

$$W_d = \frac{1}{2} \int_{str} \frac{N^2}{ES} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{T^2}{GS} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{M_t^2}{GI_0} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{M_{fy(z)}^2}{EI_{Gz(y)}} \cdot dx \quad 7.6$$

#### 7.4 Egalité de Clapeyron

L'égalité (7.1) entre énergie de déformation et travaux des efforts extérieurs permet d'écrire :

$$\frac{1}{2} \int_{str} \frac{N^2}{ES} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{T^2}{GS} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{M_t^2}{GI_0} \cdot dx + \frac{1}{2} \int_{str} \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} \cdot dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i \delta_i \quad 7.7$$

C'est l'égalité de Clapeyron.

### Limite de l'égalité de Clapeyron

Cette égalité ne peut s'appliquer que si les conditions suivantes sont toutes satisfaites :

- Système isostatique,
- Appuis fixes,
- Une seule force extérieure localisée est appliquée,
- Le déplacement cherché est celui du point d'application de la seule force appliquée.

Cherchons une autre forme pour la formule de Clapeyron qui pourra être appliquée pour toutes les conditions.

### 7.5 Réciprocité des travaux

Considérons un corps élastique soumis à un système de  $n$  forces  $P_i$  (Figure 43- a) :

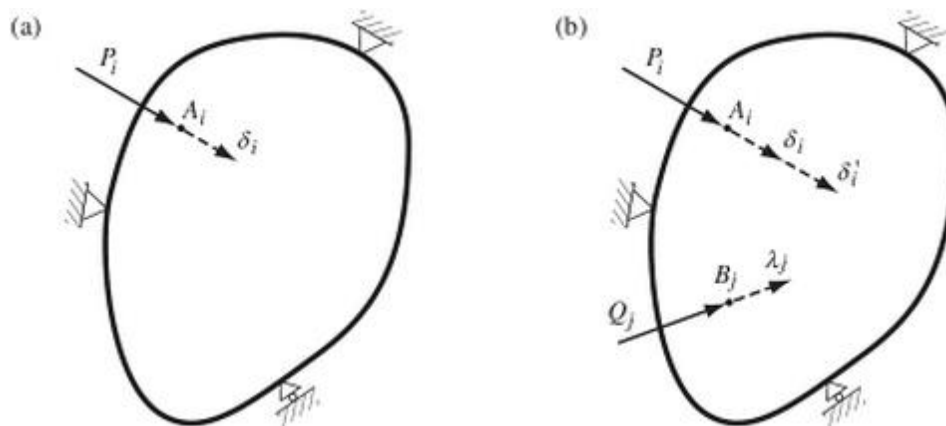


Figure 43 –Corps élastique soumis à un système de  $n$  forces  $P_i$  puis un système de  $m$  forces  $Q_j$

L'énergie élastique correspondante au système  $P_i$ :  $W(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i$

On applique ensuite un système de  $m$  forces  $Q_j$ . (Figure 43- b)

L'énergie élastique correspondante au système  $Q_j$ :  $W(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j$

Le système  $Q_j$  provoque aussi des nouveaux déplacements aux points  $A_i$ . L'énergie élastique correspondante :  $W'(P_i) = \sum_{i=1}^n \delta'_i P_i$

L'énergie de déformation totale :  $W(P_i, Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j + \sum_{i=1}^n \delta'_i P_i$

Procédons cette fois de manière inverse en appliquant le système  $Q_j$  et ensuite le système  $P_i$  (Figure 44) :

L'énergie élastique correspondante au système  $Q_j$ :  $W(Q_j) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j$

On applique ensuite le système  $P_i$ .

L'énergie élastique correspondante :  $W(P_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i$

Le système  $Q_j$  provoque aussi des nouveaux déplacements aux points  $A_i$ . L'énergie élastique correspondante :  $W'(Q_j) = \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$

L'énergie de déformation totale:  $W(Q_j, P_i) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \lambda_j Q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \delta_i P_i + \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$

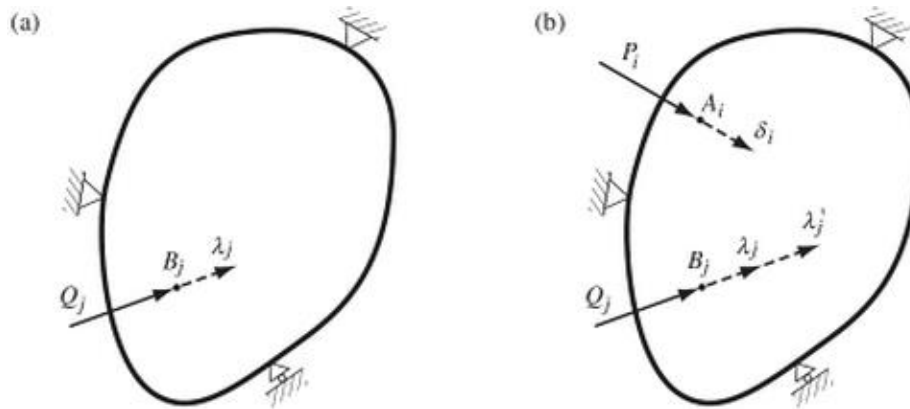


Figure 44 –Corps élastique soumis à un système de m forces  $Q_j$  puis un système de n forces  $P_i$

### Théorèmes de réciprocité

1. Les deux expressions de l'énergie de déformation totale sont égales puisque l'énergie ne dépend que de l'état final du système. On déduit donc :

$$\sum_{i=1}^n \delta'_i P_i = \sum_{j=1}^m \lambda'_j Q_j$$

*C'est le théorème de **réciprocité de Betti- Rayleigh***

Le travail du système de forces  $P_i$  lors de la déformation imposée par le système  $Q_j$  est égale au travail du système de forces  $Q_j$  lors de la déformation imposée par le système  $P_i$

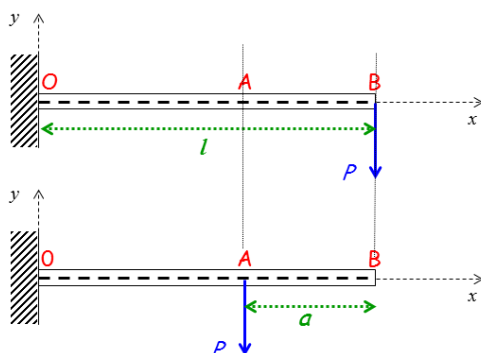
2. Le théorème de réciprocité **de Betti- Rayleigh** peut s'exprimer aussi par l'égalité des coefficients d'influence réciproques :  $a_{ij} = a_{ji}$

3. Du théorème de Betti-Rayleigh on peut déduire un cas particulier :

*Le déplacement du point A provoqué par une force appliquée au point B est égal au déplacement du point B provoqué par la même force appliquée au point A.*

*C'est le théorème de **Maxwell** ou théorème de **réciprocité de Maxwell- Betti***

### Exemple :



$$y_{A(P1)} = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$

$$y_{B(P2)} = y_{A(P1)} = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$

Le déplacement du point A provoqué par  $P$  au point B de la poutre 1, est égal au déplacement du point B provoqué par  $P$  (la même force) appliquée au point A de la poutre 2.

C'est le théorème de **Maxwell** ou théorème de réciprocité de **Maxwell- Betti**

## 7.6 Théorème de Castigliano

$$\delta_k = \frac{\partial W_d}{\partial P_k} \quad 7.8$$

Dans un corps élastique, le déplacement  $\delta_k$  d'une force  $P_k$  est égal à la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à cette force.

Pour démontrer le théorème, reprenons la deuxième formule de Clapeyron de l'énergie :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} P_i P_j$$

Puis isolons les termes contenant  $P_k$  :

$$W_{ext} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} P_i P_k + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} P_k P_j + \frac{1}{2} a_{kk} P_k^2 + W'$$

$W'$  : Terme Indépendant de  $P_k$ .

Dérivons l'énergie de déformation par rapport à  $P_k$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_d}{\partial P_k} &= \frac{\partial W_{ext}}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ik} P_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj} P_j + a_{kk} P_k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ik} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} P_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_{ki} P_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n a_{kj} P_j \end{aligned}$$

Car  $a_{ik} = a_{ki}$ . D'où :

$$\frac{\partial W_d}{\partial P_k} = \frac{1}{2} \delta_k + \frac{1}{2} \delta_k = \delta_k$$

**Théorème de Castigliano : Intégrales de Mohr au cas où seul le moment de flexion est considéré**

$$\delta_k = \frac{\partial W_d}{\partial P_k} = \frac{1}{EI} \int_{str}^{s^2} M_f \frac{\partial M_f}{\partial P_k} ds = \frac{1}{EI} \int_{str}^{s^2} M_f \bar{M}_f ds \quad 7.9$$

$M_f$  : Moment de flexion réelle de la structure

$\bar{M}_f$  : Moment de flexion de la structure où  $P_k=1$  est la seule force exercée.

Souvent les répartitions de  $m_f$  sont de forme **constante**, **linéaire** (triangle ou trapèze) ou **parabolique** : on utilise le tableau des intégrales de Mohr pour ce genre de calcul (Tableau 6).

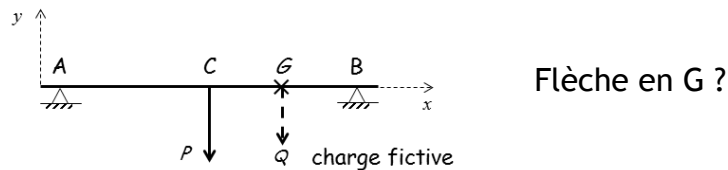
**Théorème de Castigliano pour un point non chargé : Application d'une charge fictive****Exemple : Poutre sur 2 appuis**

Figure 45 –Poutre sur 2 appuis et charge fictive au point G.

On applique au point G, une charge fictive  $Q$  travaillant dans le déplacement  $y_G$ . On applique ensuite le théorème de Castigliano (7.8) tout en rendant  $Q=0$  au résultat définitif.

$$\delta_G = \left[ \frac{\partial W_d}{\partial Q} \right]_{Q=0} \quad 7.10$$

**Théorème de Castigliano pour un point non chargé : Intégrales de Mohr au cas où seul le moment de flexion est considéré**

$$\delta_G = \frac{1}{EI} \int_{s_1}^{s_2} M_f \bar{M}_f ds \quad 7.11$$

$M_f$  : Moment de flexion réelle de la structure (sans  $Q$ )

$\bar{M}_f$  : Moment de flexion de la structure où  $Q=1$  est la seule force exercée

Le tableau des intégrales de Mohr peut être utilisé aussi pour ce genre de calcul (Tableau 6).

**7.7 Théorème de Ménabréa : Pour les structures hyperstatiques****Théorème :**

La dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes  $I_i$  est nulle à condition que les points d'application des forces ne bougent pas ( $U_i = 0$ ) ou que les sections ne tournent pas ( $q_i = 0$ )

Pour une structure hyperstatique, suivre les 4 étapes ci-dessous :

**Etape1** : Fixer les  $n$  inconnues de liaisons et les  $p$  équations d'équilibre,

**Etape2** :  $n - p = k$  est le degré d'hyperstaticité. Il faut  $k$  équations à ajouter.

**Etape3** : On fixe  $k$  inconnues surabondantes ( $I_1, I_2, \dots, I_k$ ) puis on écrit les inconnues restantes ( $I_{k+1}, I_{k+2}, \dots, I_n$ ) et l'énergie de déformation ( $W_d$ ) en fonction des  $k$  inconnues surabondantes :

$$\begin{cases} I_{k+1}, I_{k+2}, \dots, I_n = f(I_1, I_2, \dots, I_k) \\ W_d = W_d(I_1, I_2, \dots, I_k) \end{cases}$$

**Etape4** : Les  $k$  équations à ajouter sont :

$$\left[ \frac{\partial W_d}{\partial I_i} \right]_{i=1 \dots k} = 0 \quad 7.12$$

Tableau des intégrales de Mohr

Tableau tel que :  $\int_0^L M_i(x) \cdot M_j(x) \cdot dx$ 

| $M_i(x)$ | $M_j(x)$                               | $M_j(x)$                                                    | $M_j'$                                                                                                          | $M_j$                                                                       | $M_j$                                                                                  | $M_j$                                                                                |
|----------|----------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                        |                                                             |                                                                                                                 |                                                                             |                                                                                        |                                                                                      |
| $M_i$    | $L \cdot M_i M_j$                      | $\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$                               | $\frac{1}{2} L \cdot M_i (M_j + M_j')$                                                                          | $\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$                                               | $\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$                                                          | $\frac{2}{3} L \cdot M_i M_j$                                                        |
|          | $\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$          | $\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$                               | $\frac{1}{6} L \cdot M_i (2 \cdot M_j + M_j')$                                                                  | $\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$                                               | $\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$                                                         | $\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$                                                        |
|          | $\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$          | $\frac{1}{6} L \cdot M_i M_j$                               | $\frac{1}{6} L \cdot M_i (M_j + 2 \cdot M_j')$                                                                  | $\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j$                                               | $\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$                                                          | $\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$                                                       |
|          | $\frac{1}{2} L \cdot M_j (M_i + M_i')$ | $\frac{1}{6} L \cdot M_j (2 M_i + M_i')$                    | $\frac{1}{6} L \cdot (2 \cdot M_i \cdot M_j + M_i \cdot M_j' + M_i' \cdot M_j + 2 \cdot M_i' \cdot M_j')$       | $\frac{1}{3} L \cdot M_j (M_i + M_i')$                                      | $\frac{1}{12} L \cdot M_j \cdot (5 \cdot M_i + 3 \cdot M_i')$                          | $\frac{1}{12} L \cdot M_j \cdot (3 \cdot M_i + 5 \cdot M_i')$                        |
|          | $\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$          | $\frac{1}{6} L \cdot M_i M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right)$ | $\frac{1}{6} L \cdot M_i \left[ M_j \left(1 + \frac{x'}{L}\right) + M_j' \left(1 + \frac{x'}{L}\right) \right]$ | $\frac{1}{3} L \cdot M_i M_j \cdot \left(1 + \frac{x \cdot x'}{L^2}\right)$ | $\frac{1}{12} L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x'}{L} - \frac{x'^2}{L^2}\right)$ | $\frac{1}{12} L \cdot M_i M_j \cdot \left(3 + \frac{3x}{L} - \frac{x^2}{L^2}\right)$ |
|          | $\frac{1}{2} L \cdot M_i M_j$          | $\frac{1}{4} L \cdot M_i M_j$                               | $\frac{1}{6} L \cdot M_i (M_j + M_j')$                                                                          | $\frac{5}{12} L \cdot M_i M_j$                                              | $\frac{17}{48} L \cdot M_i M_j$                                                        | $\frac{17}{48} L \cdot M_i M_j$                                                      |

Guillaume Grampex

1

Tableau 6. Intégrales de Mohr.

## Chapitre 8

### Flambage

#### 8.1 Essai de flambage : Poutre en compression simple

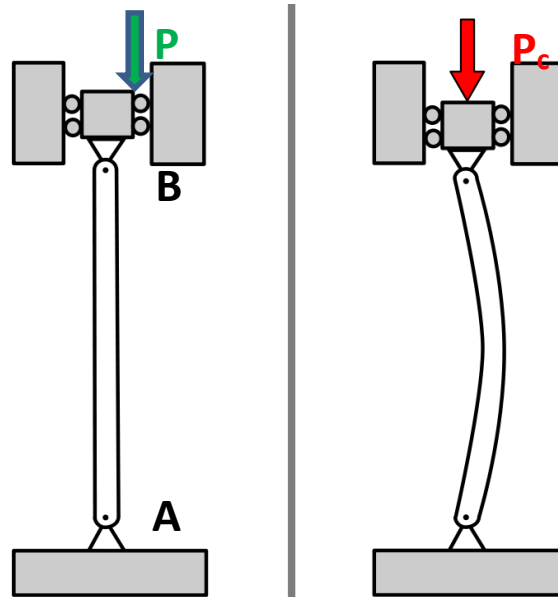


Figure 46 – Poutre bi-articulée en essai de flambage.

#### Hypothèses

- Poutre parfaitement rectiligne, homogène et isotrope.
- Les actions aux points A et B sont parfaites.
- La charge  $P$  est parfaitement axiale et croît progressivement.

#### Observations

- On observe que la poutre reste rectiligne dans un premier temps : elle est simplement **comprimée**.
- Lorsque la charge  $P$  croît et dépasse une certaine valeur  $P_c$  appelée **charge critique**, la poutre se déforme en fléchissant dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression.

Ce phénomène s'appelle le **flambement** ou **flambage**.

#### Causes du flambage

Dans la pratique, les hypothèses énoncées sont irréalisables et la charge  $P$  provoque vite un moment de flexion.

## 8.2 Théorie d'Euler

### 8.2.1 Poutre bi- articulée

#### Solution générale

Soit la poutre AB sous l'influence de l'effort Normal P en A et B. La ligne moyenne se déforme et prend une très légère courbure.

$y(x)$  est la déformée au point G.

Cette déformation influe sur l'équilibre statique et provoque un moment de flexion  $M_z$ .

Avec :

$$M_z(x) = -P y(x)$$

Or d'après les résultats de la RDM avec l'hypothèse des petites déformations :

$$M_z(x) = E.I.y''(x)$$

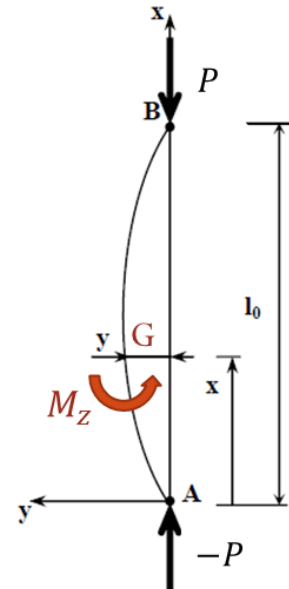


Figure 47 – poutre bi-articulée en flambage.

$$\text{Ce qui donne :} \quad y'' + \frac{P}{EI}y = 0 \quad 8.1$$

La solution générale de l'équation 8.1 est de la forme :

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) \quad \text{Avec :} \quad \omega^2 = \frac{P}{EI} \quad 8.2$$

A et B sont des constantes déterminées par les conditions aux limites :

- Pour  $x = 0$ ,  $y(0) = 0$  ; donc  $A = 0$
- Pour  $x = L$ ,  $y(L) = 0$  ; donc  $B \sin \omega L = 0$  :  $B \neq 0$ ,  $\sin \omega L = 0$

$$\text{Ce qui donne :} \quad \omega L = \pi n \quad \text{Avec } n \text{ entier} \quad 8.3$$

#### 1er mode de flambage (n = 1)

D'après l'équation 8.3 pour  $n = 1$  :

$$\omega = \frac{\pi}{L} \quad 8.4$$

$$\text{Et la déformée :} \quad y = B \sin \frac{\pi}{L} x \quad 8.5$$

La constante B reste indéfini. Elle représente la flèche maximale lorsque  $x = \frac{L}{2}$  :

$$B = y_{\max} = y\left(x = \frac{L}{2}\right)$$

### Charge critique d'Euler

D'après les équations 8.2 et 8.3 :

$$\omega^2 = \frac{P}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

La charge critique d'Euler ( $n = 1$ )

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{L_f^2} \quad 8.6$$

$P_c$  est la charge au-delà de laquelle, la poutre commence le flambage (ruine).

$L_f$  est la longueur libre de flambage. Pour la Poutre bi-articulée  $L_f = L$ .

Autres modes de flambement ( $n = 2, 3, \dots, n$ ) :

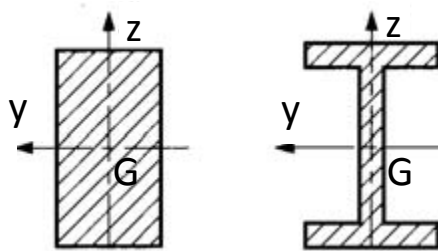
$$P_{c(n)} = n^2 \frac{\pi^2 E I}{L^2} = n^2 P_{c1}$$

**N.B** : Seule la charge critique  $P_{c(1)}$  est considérée, en effet la poutre sera déjà ruinée avant que la charge n'atteigne  $P_{c(2)}$  ou  $P_{c(n)}$ .

### Remarques

- La poutre fléchit dans la direction du plus faible moment quadratique  $I$  de la section !

Pour les deux sections ci-contre, le flambement se produit autour de l'axe **Gz** ( $IG_z < IG_y$ ).



- La section du **triangle équilatéral** résiste le mieux au flambement en comparaison avec d'autre forme de section de même aire.

### Cas possibles pour la poutre

Plusieurs cas sont possibles pour la poutre :

- $P < P_c$  : compression simple, la poutre reste droite, elle est en **équilibre stable**.
- $P = P_c$  : la poutre peut rester droite ou fléchir (flamber) avec une flèche maximale égale à  $B$ , elle est en **équilibre neutre**.

A noter que  $B = y_{\max}$  est en général petit.

- $P > P_c$  : forte tendance au flambement de la poutre, elle est en **équilibre instable**.

$B$  augmentera très rapidement avec un léger accroissement de  $P$ .

### Longueur libre de flambage

Les résultats établis pour la poutre bi-articulée et bi-encastée peuvent être généralisés pour des poutres dont les conditions d'appuis sont différentes :

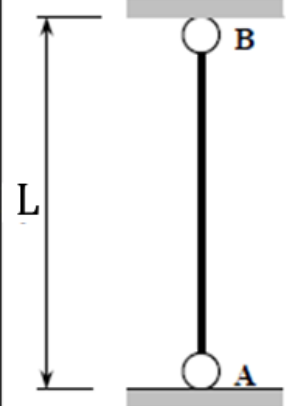
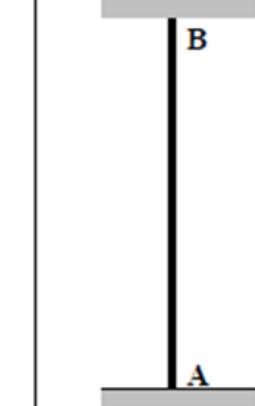
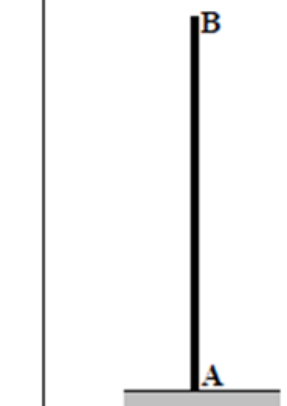
|                                                                                   |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|  |  |  |  |
| $L_f = L$                                                                         | $L_f = \frac{\sqrt{2}}{2} L$                                                      | $L_f = \frac{L}{2}$                                                                | $L_f = 2L$                                                                          |

Figure 48 –Longueur libre et charge critique pour différents cas d'appuis.

#### 8.2.2 Poutre bi- encastée (Figure 49)

Soit une poutre AB **bi- encastée** et encaissant un effort Normal P.

- Montrer que l'équation générale de la déformée  $y(x)$  s'écrit :

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{m}{P} \quad \text{Avec :} \quad \omega^2 = \frac{P}{EI} \quad 8.7$$

- Déterminer la charge critique d'Euler puis montrer que la longueur libre de flambage s'écrit :

$$L_f = \frac{L}{2}$$

#### 8.2.3 Poutre bi- articulée avec déformation initiale (Figure 50)

Soit une poutre AB bi- articulée et encaissant un effort Normal P avec une déformation initiale (a) au milieu C de la poutre.

- Montrer que l'équation générale de la déformée  $y(x)$  s'écrit :

$$y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x) + \frac{a}{\left(\frac{\pi}{\omega L}\right)^2 - 1} \sin \frac{\pi}{L} x \quad \text{Avec :} \quad \omega^2 = \frac{P}{EI} \quad 8.8$$

- Montrer que la flèche maximale au milieu C s'écrit :

$$y_c = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad 8.9$$

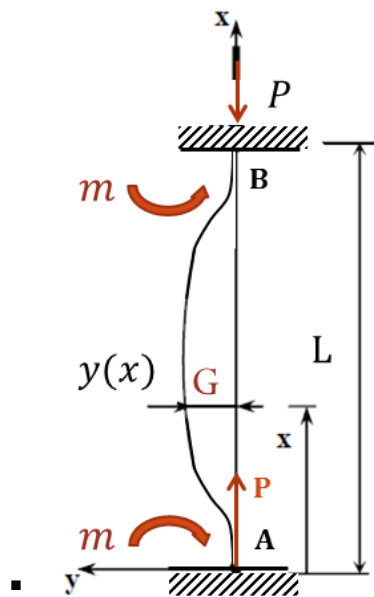


Figure 49 – poutre bi- encastée en flambage.

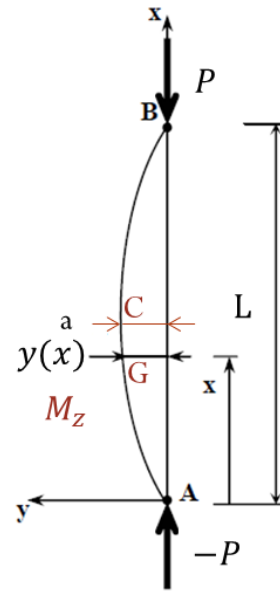


Figure 50 – poutre bi- articulée avec déformation initiale en flambage.

### 8.2.4 Contrainte critique d'Euler /Élancement

La contrainte critique limite ou admissible :

$$\sigma_c = \frac{P_c}{S} = \frac{\pi^2 E \cdot I}{S L_f^2} \sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad 8.10$$

Avec :

$$\lambda = \frac{L_f}{\rho} \quad \text{et} \quad \rho = \sqrt{\frac{I}{S}} \quad 8.11$$

$\lambda$  : Élancement (sans unité),  $\rho$  : Rayon de giration ,  $I$  : Moment quadratique le plus faible,  $S$  : Aire de la section droite.

#### Remarque :

Plus la barre est élancée plus le risque de flambement élastique est important.

On définit l'élancement critique pour  $\sigma_c = \sigma_e$  :

$$\lambda_c = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_e}} \quad 8.12$$

Dans ce cas :

$$\sigma_c = \frac{\sigma_e}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad \text{et} \quad P_c = \frac{S\sigma_e}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad 8.13$$

L'élanement critique ne dépend que des caractéristiques du matériau.

- Pour acier A33 :  $E=2 \cdot 10^5$  Mpa,  $\sigma_e=155$  Mpa,  $\lambda_c=113$
- Pour acier 45SCD6 :  $E=2 \cdot 10^5$  Mpa,  $\sigma_e=1\,370$  Mpa,  $\lambda_c=38$

Valeurs moyennes adoptées

| Configuration | Profilés en acier | Poteaux en fonte | Poteaux en bois |
|---------------|-------------------|------------------|-----------------|
| $\lambda_c$   | 100               | 60               | 70              |

### 8.2.5 Domaine d'utilisation de la formule d'Euler

$\sigma_e$  : limite élastique

| $\sigma_c < \sigma_e$                                                                                                                                                                                    | $\sigma_c > \sigma_e$                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ il y aura ruine par flambement dès que <math>\sigma</math> atteindra la valeur <math>\sigma_c</math>.</li> <li>▪ <math>\lambda \geq \lambda_c</math></li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>▪ la poutre périra par compression simple (sans flambement) dès que <math>\sigma</math> atteindra la valeur <math>\sigma_e</math>.</li> <li>▪ Dans ce cas, le dimensionnement se fait en compression simple.</li> <li>▪ <math>\lambda \leq \lambda_c</math></li> </ul> |

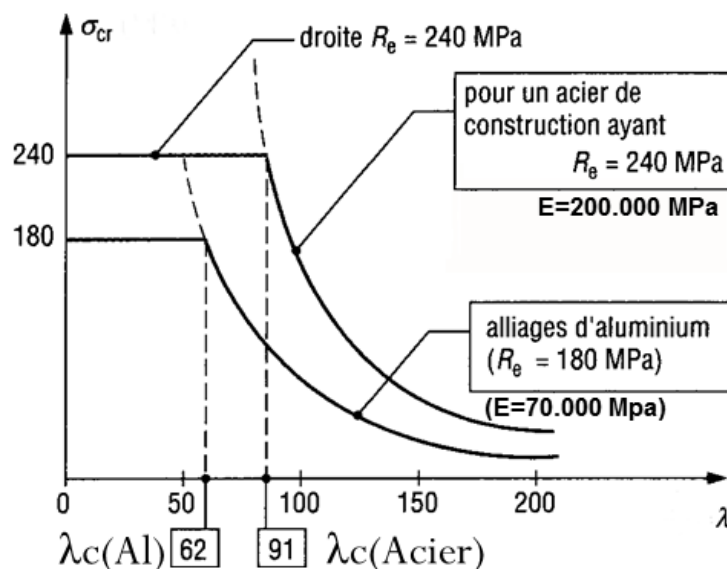


Figure 51 –Domaine d'utilisation de la formule d'Euler

Le graphe ci- dessus représente la variation de  $\sigma_c$  en fonction de  $\lambda$  pour un acier usuel et pour un alliage d'aluminium.

Acier usuel :  $E=200\,000$  Mpa,  $Re=240$  MPa,

Alliage d'aluminium :  $E=70\,000$  Mpa,  $Re=180$  MPa.

L'allure des courbes est hyperbolique et n'est valable que si :  $\sigma_c \leq \sigma_e$ .

En conséquence, la formule d'Euler n'est utilisable que lorsque :  $\lambda > \lambda_c$ .

### 8.2.6 Calcul de résistance

#### Critère d'Euler

La charge maximale  $P$  supportée doit rester inférieure à la charge critique d'Euler  $P_c$ .

$$P = \frac{P_c}{k}$$

$k$  est le coefficient de sécurité.

$$k = \frac{P_c}{P} = \frac{\sigma_e}{\sigma_{pe}} \quad 8.14$$

$\sigma_e$  est contrainte de limite élastique et  $\sigma_{pe}$  est la contrainte pratique de compression.

Dans ce cas, la charge maximale  $P$  supportée s'écrit en tenant compte de l'équation (8.13) :

$$P = \frac{P_c}{k} = \frac{1}{k} \frac{S \sigma_e}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} = \frac{S \sigma_{pe}}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} \quad 8.15$$

$S \cdot \sigma_{pe}$  : Force axiale appliquée en compression simple.

$\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2$  : Terme de correction qui tient compte de l'élancement  $\lambda$ .

#### Critères de résistance

- La formule d'Euler n'est valide que pour les poutres longues ( $\lambda > \lambda_c$ ).
- Dans le cas de poutres courtes, elles seront calculées à la compression simple.
- Dans le cas de poutres de longueur moyenne, on utilise la formule empirique de Rankine.

Pour les poutres en acier ( $\lambda_c=100$ ), on utilise l'une des formules suivantes :

| Poutres courtes<br>$\lambda \leq 20$<br><b><u>Compression simple</u></b> | Poutres moyennes<br>$20 \leq \lambda \leq 100$<br><b><u>Rankine</u></b>                                                       | Poutres élancées<br>$\lambda \geq 100$<br><b><u>Euler</u></b>                                                           | 8.16 |
|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $P = \frac{\sigma_e}{k} \cdot S$                                         | $P = \frac{1}{k} \frac{\sigma_e \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$<br>$k\text{-Rankine} : 1.7 \dots 2.2$ | $P = \frac{1}{k} \frac{\sigma_e \cdot S}{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$<br>$k\text{-Euler} : 2.5 \dots 3.5$ |      |

### 8.3 Méthode de Dutheil

Soit la poutre bi- articulée AB avec déformation initiale et encaissant un effort Normal P.

(a) est la déformation initiale au milieu de la poutre C

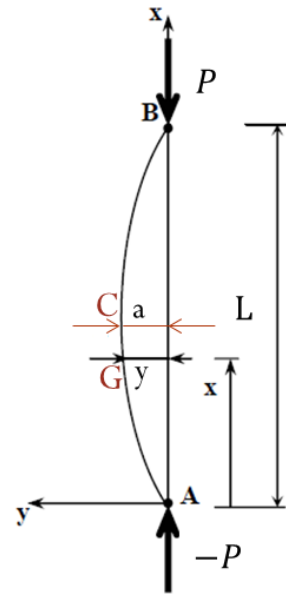


Figure 52 – poutre en flambage.

Lors du fléchissement de la poutre, Dutheil utilise la contrainte normale due à la sollicitation composée de compression- flexion avec déformation initiale (a) au milieu de la poutre :

$$|\sigma| = \left| \frac{P}{S} - \frac{M f_z}{\frac{I_{Gz}}{v}} \right| \quad 8.17$$

Au milieu de la poutre, la flèche maximale s'écrit (équation 8.9) :

$$f = \frac{a}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad \text{Avec :} \quad P_c = \frac{\pi^2 E I}{L^2}$$

Le moment de flexion maximal est au milieu C :

$$|M f_z|_{max} = P \cdot f = P \cdot \frac{a}{1 - \frac{P}{P_c}} \quad 8.18$$

La contrainte normale maximale s'écrit donc :

$$|\sigma|_{max} = \frac{P}{S} + \frac{\pi^2 E a v}{L^2} \frac{P}{P_c - P} \quad 8.19$$

La condition de résistance s'écrit :

$$\sigma \leq \sigma_e \quad \text{Ou encore :} \quad \sigma^2 - \sigma(\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0) + \sigma_c \sigma_e \geq 0 \quad 8.20$$

Avec :

$$\sigma_0 = \frac{\pi^2 Eav}{L^2} \quad 8.21$$

Et  $\sigma_c = \frac{P_c}{S}$  est la contrainte critique d'Euler

N.B : Il faut penser au coefficient de sécurité.

Pour simplifier, Dutheil propose :

$$\sigma_e + \sigma_c + \sigma_0 = \sigma_t \quad \text{Avec :} \quad \sigma_t \approx \sigma_c + 1.3 \sigma_e \quad 8.22$$

N.B : L'expression approchée de  $\sigma_t$  est vérifiée expérimentalement.

La résolution de (8.20) donne en ajoutant le coefficient de sécurité s :

$$s \cdot \sigma \leq \frac{1}{2} \sigma_t - \sqrt{\frac{\sigma_t^2}{4} - \sigma_c \sigma_e} \quad 8.23$$

$\sigma$  est appelée contrainte d'affaissement ou contrainte de ruine.

- Cette formule est vraie quel que soit la valeur de l'élancement,
- Pour des matériaux comme la fonte ou le béton, la ruine intervient sur les fibres tendues car  $\sigma_{e \text{ ext}} \ll \sigma_{e \text{ comp}}$ .

# Chapitre 9

## Fatigue des matériaux

### 9.1 Introduction

#### Exemple 1

Si une vis de diamètre 6 mm peut tenir un objet d'une tonne, elle peut en revanche casser si on lui suspend un objet plus léger de 100 kg un million de fois de suite.

#### Exemple 2

Considérons une barre de traction en acier standard [S235](#), d'une section de  $1 \text{ cm}^2$ .

- Si l'on tire dessus d'un coup avec une force supérieure à 23 500 N, la barre présente une déformation irréversible (déformation plastique),
- elle casse pour une force de 37 000 N.

Maintenant, supposons que l'on tire sur cette barre avec une force de 23 400 N; la pièce résiste sans problème et ne présente pas de déformation irréversible. Mais si l'on répète cette traction dix millions de fois, on constate que la pièce casse. On parle de rupture de fatigue.

À chaque sollicitation, la pièce subit un microdommage qui n'a aucune conséquence à court terme, mais ces dommages se cumulent sur plusieurs centaines de milliers de cycles et conduisent à la rupture.

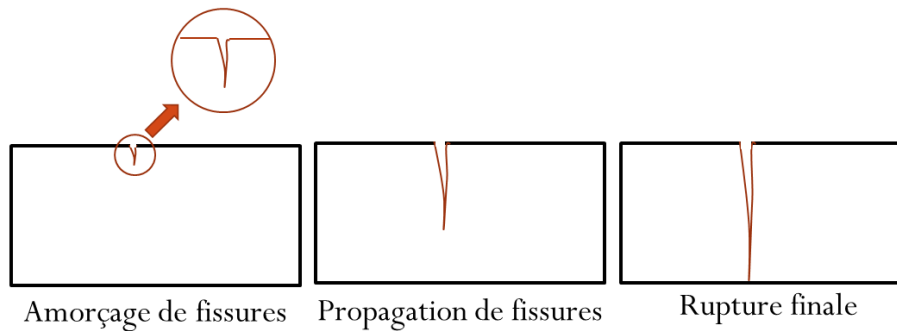
#### Définition

La **fatigue** désigne l'endommagement d'une pièce sous l'effet d'efforts variables et répétés, vibrations, rafales de vent...L'application et le retrait d'efforts plus faibles que prévu peut provoquer sa rupture.

#### Sources de fatigue

- Phases de démarrage et d'arrêt d'un moteur,
- Variations de régime,
- Rafales de vent sur une structure,
- Houle sur des structures flottantes (bateaux, plates-formes pétrolières),
- Effets de la dilatation d'un appareil qui chauffe et se refroidit (par exemple une chaudière),
- Contacts répétés (engrenages, billes sur la piste d'un roulement à billes),
- Secousses de la route pour un véhicule,
- Décollages et atterrissages pour le train d'atterrissage d'un avion,
- Vibrations pour de petites pièces (pattes de fixation, fil d'un circuit électronique)...

### Etapes principales de la ruine d'un assemblage par fatigue



### Paramètres pour prédire le comportement en fatigue

Les paramètres souvent utilisés pour prédire le comportement en fatigue et ainsi le nombre de cycles à la rupture d'une structure sont :

- l'amplitude et la valeur moyenne de la sollicitation (chargement ou déformation imposée),
- l'état de surface,
- le milieu dans lequel la structure sera utilisée.

### Remarques

- Même si l'étude de la fatigue s'appuie sur des considérations théoriques (en particulier mécanique de la rupture), la fatigue est essentiellement un domaine expérimental.
- La caractérisation d'un matériau, d'une pièce, d'un ensemble, d'une structure... nécessite de nombreux essais et mesures.

### 9.2 Essai de traction d'une pièce métallique (Rappel)

Lorsque l'on exerce une contrainte monotone sur une éprouvette métallique, lisse et ductile (avec un champ de contrainte quasi uniforme), au-delà de la limite d'élasticité  $R_e$ , l'éprouvette commence à se déformer de manière irréversible par déformation plastique.

Lorsqu'on continue à exercer sur l'éprouvette une contrainte supérieure à  $R_e$ , cette déformation plastique génère un endommagement puis la rupture. La contrainte provoquant l'endommagement est la résistance à la traction notée  $R_r$  ou  $R_m$  supérieure à  $R_e$ .

Or, dans le cas d'un chargement cyclique, on observe une rupture après plusieurs cycles (parfois plusieurs millions de cycles), pour des valeurs de contrainte inférieures à  $R_e$ .

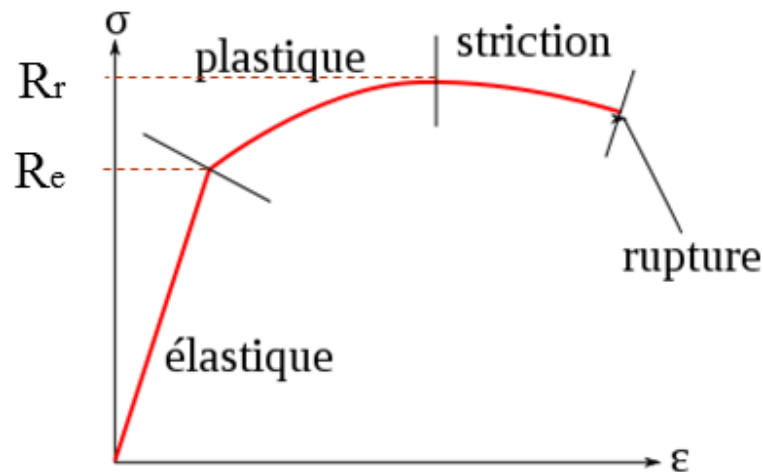


Figure 53 –Graphe de l'essai de traction

### 9.3 Essai de base de fatigue (R=-1)

On soumet l'éprouvette à un essai de base avec une sollicitation uni-axial purement alternée. La contrainte subie a pour forme :

$$\sigma(t) = \sigma_a \sin(2\pi f t)$$

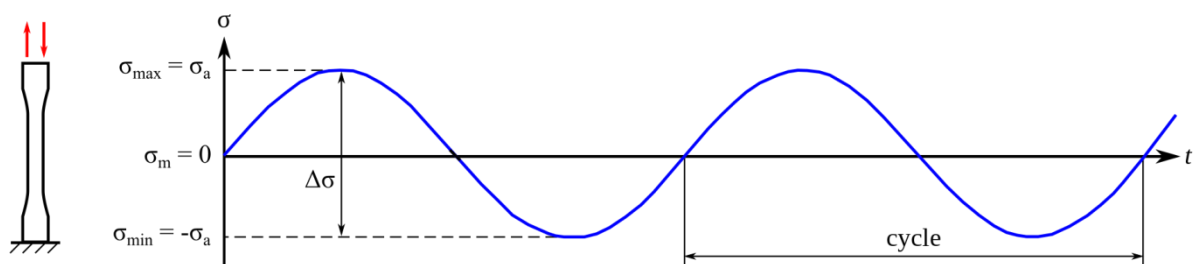


Figure 54 –Essai de fatigue en sollicitation purement alternée (R = -1).

$\sigma_a$  est l'amplitude de contrainte et  $f$  est la fréquence.

On fixe l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$  et on regarde au bout de combien de cycles  $N$  se produit la rupture.

- Pour la fréquence, on se limite en général à 30 Hz pour un acier et à 3 Hz pour un polymère.
- L'éprouvette casse de manière aléatoire. Il faut donc effectuer plusieurs essais pour un niveau de contrainte alternée  $\sigma_a$  donné. Dans la pratique, on utilise 3 à 9 éprouvettes.

#### 9.3.1 Courbe de Wöhler

On fait des essais à divers niveaux d'amplitude de contrainte  $\sigma_a$ . On peut donc déterminer le nombre moyen de cycles à la rupture en fonction de  $\sigma_a$ ,  $N(\sigma_a)$ . Ces points sont placés sur un diagramme d'échelle logarithmique en base 10 pour  $N$  et échelle linéaire pour  $\sigma_a$  et forme la courbe de Wöhler ou courbe S-N (stress vs number of cycles).

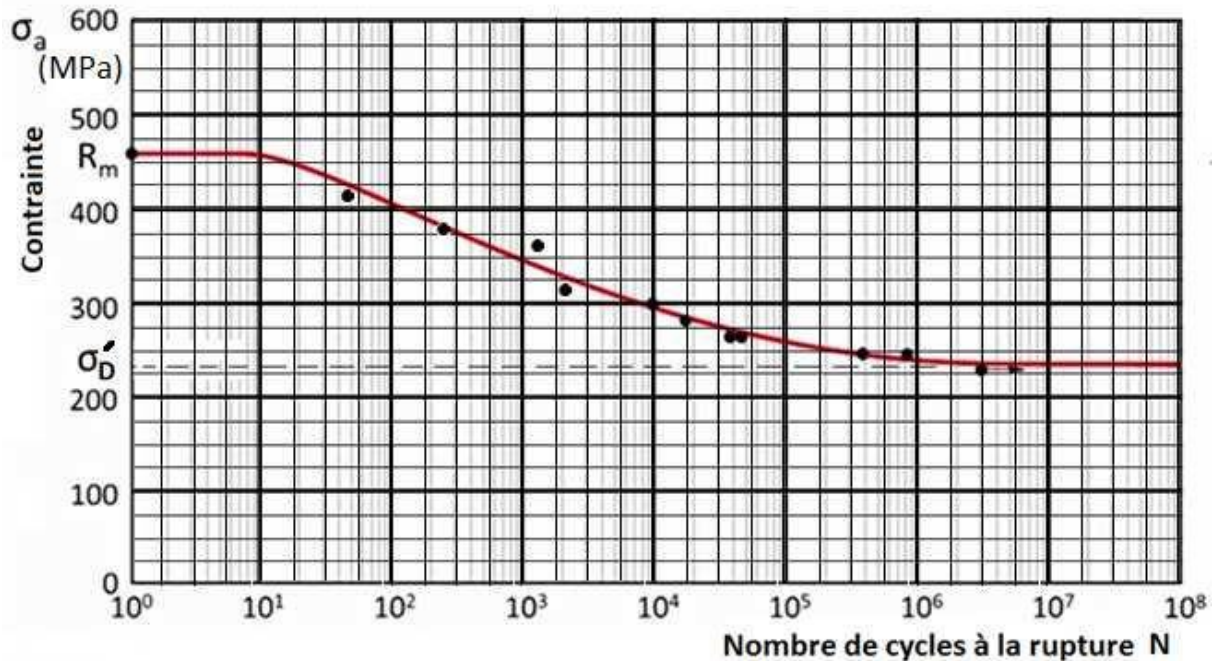


Figure 55 – Courbe de Wöhler pour un alliage d'aluminium

### Remarques

- Cette courbe permet de prédire la durée de vie d'une pièce qui subit de la fatigue purement alternée ou bien de la dimensionner pour qu'elle ait une durée de vie donnée.
- L'asymptote à la courbe de Wöhler permet de trouver la limite d'endurance  $\sigma_D$  au-dessous de laquelle il n'y aura pas de risque de rupture.

### 9.3.2 Domaines de la courbe de Wöhler

La courbe de Wöhler est constituée de trois domaines de durées de vie :

- Domaine des courtes durées de vie ou domaine oligocyclique (inférieur à  $10^4$  ou  $10^5$  cycles) : c'est la zone de fatigue où la rupture est atteinte au bout d'un nombre limité de cycles. Si pour une sollicitation où la contrainte maximale par exemple est  $\sigma = 300$  MPa, la rupture se produit avec une probabilité correcte avant  $10^4$  cycles.
- Domaine des longues durées de vie (supérieur à  $10^6$  ou  $10^7$  cycles) : c'est la zone d'endurance illimitée où la rupture n'est atteinte qu'après un nombre élevé de cycles proche de  $10^8$ .
- Domaine de l'endurance limitée : c'est un domaine intermédiaire entre la fatigue oligocyclique et le domaine des grandes durées de vie.

### 9.3.3 Limite d'endurance des aciers $\sigma_D(R = -1)$

L'expérience accumulée sur les aciers montre que la limite d'endurance à  $10^7$  cycles en traction-compression purement alternée, dépend essentiellement de la résistance à la traction  $R_m$  :

| $R_m$                                 | $\sigma_D(R = -1)$                             |
|---------------------------------------|------------------------------------------------|
| $R_m < 800$ MPa et $R_m > 1\,300$ MPa | $\sigma_D = R_m(0,50 - 1,3 \cdot 10^{-4} R_m)$ |

|                                        |                                                |
|----------------------------------------|------------------------------------------------|
| $800 \leq R_m \leq 1\ 300 \text{ MPa}$ | $\sigma_D = R_m(0,51 - 1,1 \cdot 10^{-4} R_m)$ |
|----------------------------------------|------------------------------------------------|

On se contente souvent de la partie linéaire de la loi :

$$\sigma_D(R = -1) \approx 0,5 R_m$$

#### 9.4 Essai de fatigue ( $R \neq -1$ )

L'éprouvette est soumise à une sollicitation sinusoïdale de moyenne non nulle :

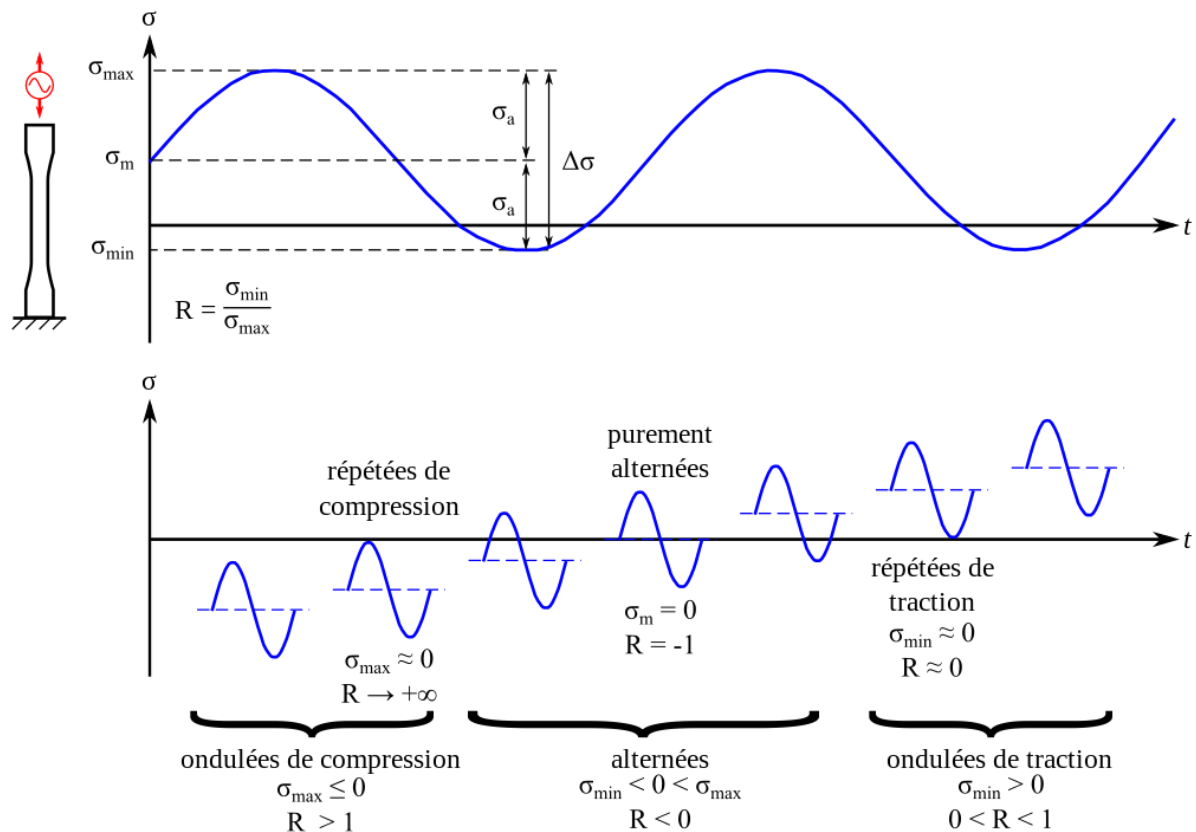


Figure 56 – Divers types de sollicitations sinusoïdales.

$\sigma_{min}$  et  $\sigma_{max}$  sont les valeurs extrêmes de la contrainte.

La valeur moyenne de la contrainte :

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{min} + \sigma_{max}}{2}$$

Le rapport de contrainte :

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$$

#### Remarques

- L'essai en contraintes ondulées de compression est rarement utilisé car la probabilité de rupture est faible.
- Le rapport de contrainte  $R$  doit toujours figurer sur une courbe de Wöhler.
- On peut ainsi déterminer une limite d'endurance pour chaque rapport de contrainte  $R$  :  $\sigma_D(R)$ .

### 9.4.1 Diagrammes de Haigh

On cherche une loi qui décrit la limite d'endurance en fonction de R :

$$\sigma_D = f(R)$$

Et puisque :

$$\sigma_m = \sigma_a (1 + R)/(1 - R)$$

Cette loi peut être exprimée sous la forme :

$$\sigma_D = f(\sigma_m)$$

#### Parabole de Gerber

Le traçage de la parabole nécessite de nombreux essais et un investissement en temps et en argent.

Pour certaines classes de matériaux, cette loi peut être déterminée à partir de deux essais de base seulement :

- Essai de traction simple  $R = 1$  pour déterminer  $R_m$
- Essai de traction- compression alternée  $R = -1$  pour déterminer  $\sigma_{D(R=-1)}$ .

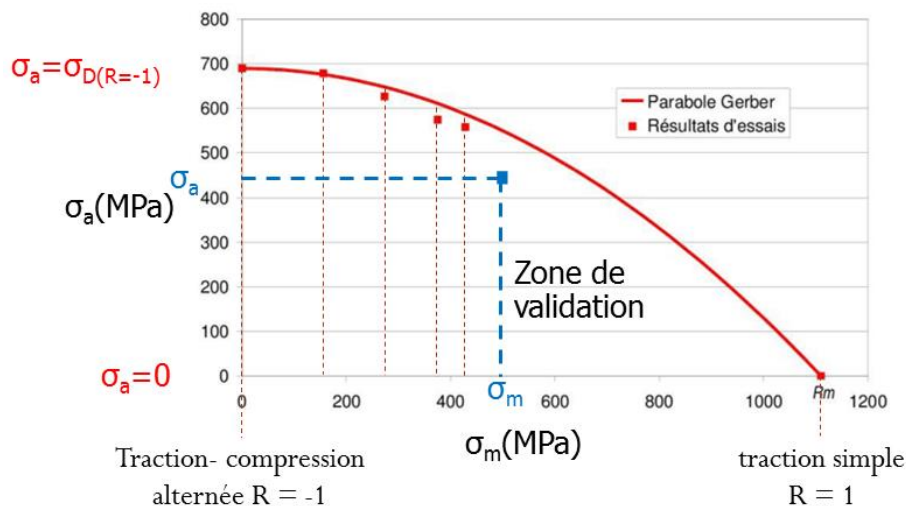


Figure 57 – Parabole de Gerber. Essais sur éprouvettes lisses en acier 30NCD16 trempé revenu.

On place le point  $(\sigma_m ; \sigma_a)$  dans le diagramme de Haigh ;

Si ce point est dans la zone de validation (sous la parabole), alors on considère que la conception est validée, que la pièce va résister.

Si le point est en dehors de la zone de validation, on est dans la « zone de danger », la zone de durée de vie limitée ( $N_{rupture} < 10^7$ ) ; la conception n'est pas validée.

#### Diagrammes simplifiés

La loi  $\sigma_D = f(\sigma_m)$  peut être modéliser par :

- la droite de Goodman :

$$\sigma_a = \sigma_{D(R=-1)} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_m} \right)$$

- la droite de Soderberg, cas prudent remplace  $R_m$  par  $R_e$  :

$$\sigma_a = \sigma_{D(R=-1)} \left( 1 - \frac{\sigma_m}{R_e} \right)$$

- la parabole de Gerber :

$$\sigma_a = \sigma_{D(R=-1)} \left( 1 - \left( \frac{\sigma_m}{R_m} \right)^2 \right)$$

- la norme allemande VDI : domaine bilinéaire avec deux segments de droite :
  - segment 1 :  $[(0 ; \sigma_D) ; (R_m - \sigma_D/2 ; \sigma_D/2)]$
  - segment 2 :  $[(R_m - \sigma_D/2 ; \sigma_D/2) ; (R_m ; 0)]$

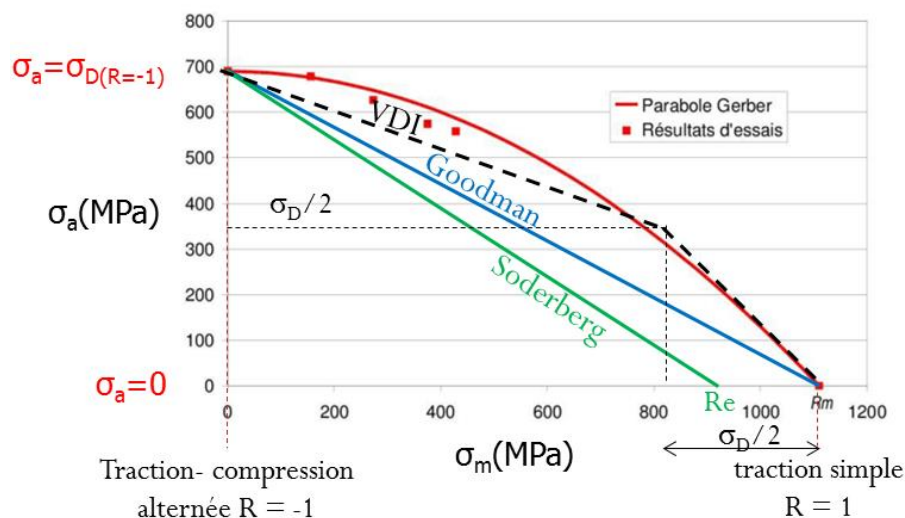


Figure 58 –Diagrammes simplifiés de Haigh

On utilise en général pour les aciers :

- la droite de Goodman si :  $R_m > 1\,300\text{ MPa}$
- la parabole de Gerber si :  $R_m < 1\,200\text{ MPa}$

### Remarques

Les diagrammes de Haigh permettent donc d'extrapoler les résultats obtenus en traction-compression alternée pure ( $R = -1$ ) à toutes les valeurs de  $R$ .

En fonction de la criticité, chaque métier a sa courbe préférée :

- l'automobile travaille de préférence avec la courbe de Gerber,
- l'avionique préfère la droite de Goodman,
- enfin pour les applications les plus critiques, la droite de Soderberg est celle qui apporte la sécurité maximale.

### 9.4.2 Diagramme de Ross

Décrit l'effet de contrainte moyenne négative (compression). La DVM (Société allemande de Matériaux et Métallurgie) recommande d'utiliser le diagramme de Ross pour lequel il faut connaître :

- les valeurs de  $R_m$  en traction et en compression du matériau,
- ses limites d'élasticité en traction et en compression,
- ses résistances en fatigue pour  $R=-1$  et  $R=0$  pour la durée de vie considérée (dans le domaine des grandes durées de vie).

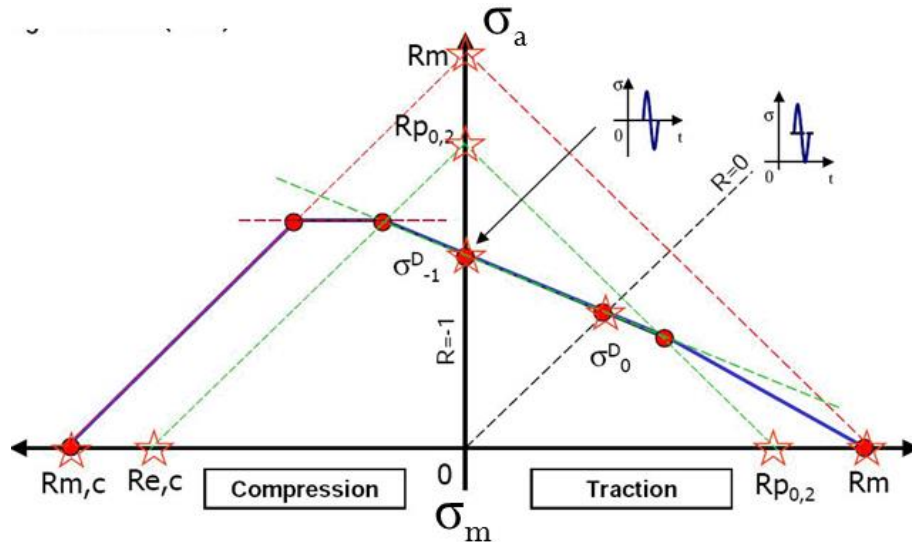


Figure 59 –Diagrammes de Ross

## 9.5 Cas réels de fatigue

Le cas de l'éprouvette lisse en traction-compression représente un cas simple qui peut être étendu aux pièces de type poutre, soumises à d'autres types de sollicitations.

### 9.5.1 Cas d'autres sollicitations simples

Il existe d'autres sollicitations simples autre que la traction-compression pour lesquels on peut faire des essais de fatigue : flexion plane alternée, flexion-rotation d'un arbre en rotation, torsion alternée.

En accumulant les essais sur une classe de matériau, on peut déterminer des coefficients qui permettent de calculer la limite d'endurance pour une sollicitation donnée à partir de la limite d'endurance d'un cas de référence.

Pour l'acier, on prend comme référence la traction-compression uniaxiale :

- torsion :  $0,67 \times \sigma_D$  ;
- traction-compression :  $1 \times \sigma_D$  ;
- flexion rotative :  $1,11 \times \sigma_D$  ;
- flexion plane :  $1,17 \times \sigma_D$ .

Cela se comprend d'un point de vue qualitatif :

- la résistance à la torsion vaut environ la moitié de la résistance à la traction ( $1/\sqrt{3} = 0,577$  fois selon le critère de Tresca), mais les fibres proches de la fibre neutre voient peu de contraintes, donc si un défaut s'y trouve, il ne provoque pas de fissure, ce qui fait « remonter » le coefficient ;

- dans le cas de la flexion rotative, les fibres extérieures subissent de la traction-compression, mais les fibres proches de la fibre neutre voient peu de contraintes, donc si un défaut s'y trouve, il ne provoque pas de fissure, ce qui fait « remonter » le coefficient ;
- flexion plane : dans le cas de la flexion rotative, toutes les fibres situées à l'extérieur sont sollicitées ; dans le cas de la flexion plane, les fibres situées à l'extérieur mais proches du feuillet neutre sont peu sollicitées, donc les défauts qui s'y trouvent ne provoquent pas de fissure, ce qui fait « remonter » le coefficient.

### 9.5.2 Cas de concentrations de contraintes

Dans le cas de la fatigue, on peut faire des essais sur des éprouvettes présentant des formes (gorge, épaulement, perçage, ...).

On trouve un coefficient de concentration de contrainte  $K_f$  inférieur au  $K_t$  (RDM) dans des conditions similaires.

Conventionnellement, on applique le coefficient à la limite d'endurance :

$$\sigma_D = \sigma_{D0}/K_f$$

où  $\sigma_{D0}$  est la limite d'endurance pour la géométrie de référence (sur une éprouvette lisse).

Pour les aciers, il existe des abaques en fonction des cas.

### 9.5.3 Prise en compte des dimensions de la poutre

Les essais de fatigue sont faits sur des éprouvettes de petit diamètre, typiquement 6 à 10 mm. Si une pièce a une section droite plus importante, sa durée de vie est plus petite :

- d'une part, la probabilité d'avoir un défaut est plus importante ;
- d'autre part, dans le cas de la torsion ou de la flexion, la circonférence soumise à un niveau de contrainte donné est plus importante, donc il y a d'autant plus de risque d'y avoir un défaut.

Cela est pris en compte par un facteur d'échelle  $K_e$ , fourni par un abaque :

$$\sigma_D = K_e \times \sigma_{D0}$$

Le facteur  $K_e$  est une fonction décroissante du diamètre.

### 9.5.4 Prise en compte de l'état de surface

L'amorçage de la fissuration a lieu en surface, et les défauts de surface créent des concentrations de contrainte. On définit donc un facteur d'état de surface  $K_s$ , qui dépend de la rugosité totale  $R_t$  et non pas de la rugosité moyenne  $R_a$  :

$$\sigma_D = K_s \times \sigma_{D0}$$

Le facteur  $K_s$  est inférieur à 1, puisque les éprouvettes d'essai sont usinées avec soin. Il est donné par un abaque en fonction de  $R_t$  et de la résistance à la traction  $R_m$ .

### 9.5.5 Méthode de calcul simplifiée

Les considérations citées permettent de valider de manière simple l'utilisation d'une pièce soumise à la fatigue dans les conditions suivantes :

- La pièce subit un état de contrainte uniaxial de traction-compression, flexion plane, flexion rotative, torsion;

- La pièce subit des efforts pouvant être décrits par une fonction sinusoïdale, dont on connaît la contrainte moyenne  $\sigma_m$  et l'amplitude de contrainte  $\sigma_a$ .
- la pièce est faite dans un matériau dont on connaît la limite d'endurance dans les conditions de sollicitation (type de sollicitation,  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  donnés) ; ou bien la pièce est faite en acier et l'on connaît sa résistance à la traction  $R_m$ .

La méthode simplifiée consiste à :

- tracer le diagramme de Haigh pour la géométrie de référence (éprouvette lisse de  $\varnothing 6$  mm).
- Déterminer les facteurs de concentration de contrainte  $K_f$ , de rugosité  $K_s$  et d'échelle  $K_e$ .
- Déterminer les contraintes nominales  $\sigma_{mn}$  et  $\sigma_{an}$ .
- Déterminer les contraintes corrigées :

$$\sigma_{mc} = K_f \sigma_{mn} \qquad \sigma_{ac} = \frac{K_f}{K_e K_s} \sigma_{an}$$

- Placer le point ( $\sigma_{mc}$ ;  $\sigma_{ac}$ ) sur le diagramme de Haigh.

### Remarques

- On applique les coefficients  $K_i$  sur les contraintes  $\sigma_m$  et  $\sigma_a$  et non sur la limite  $\sigma_D$ , ce qui évite d'avoir à retracer le diagramme de Haigh.
- la contrainte moyenne  $\sigma_m$  est affectée par un seul facteur de concentration de contrainte  $K_f$
- Cette méthode permet de valider une conception et de déterminer un coefficient de sécurité à partir de la distance à la courbe. Mais elle ne permet pas de déterminer une durée de vie attendue.

# Chapitre 10

## Treillis

### 10.1 Généralités

Les treillis sont des structures formées de barres assemblées de façon à former des triangles (forme indéformable).

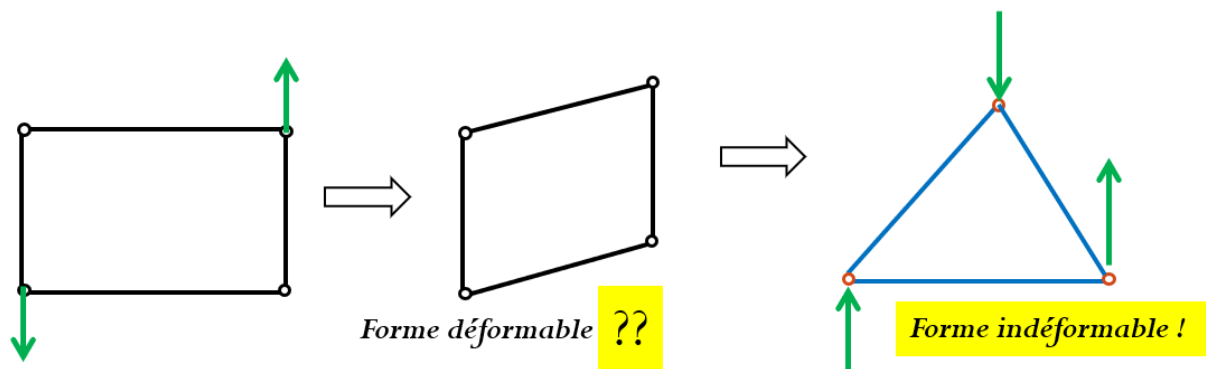


Figure 60 – Tout polygone autre qu'un triangle est déformable.

- Permettent d'alléger l'ensemble d'une construction tout en assurant une plus grande stabilité,
- Largement utilisés en construction : fermes de toiture, grues, ponts roulants, pylônes, etc.
- Chaque articulation ou nœuds de la structure est une rotule parfaite : on parle de nœud *articulé* ou *rotulé*, par opposition au nœud *rigide*;
- Les charges extérieures sont supposées appliquées aux nœuds de la structure : Les charges sur les éléments du treillis sont nulles ou faibles devant les charges nodales.
- Les éléments du treillis ne travaillent donc qu'en traction- compression.
- Dans le cas contraire il faudra prendre en compte la flexion des éléments, nous parlerons dans ce cas de **portiques**.

### 10.1.1 Efforts sur la structure

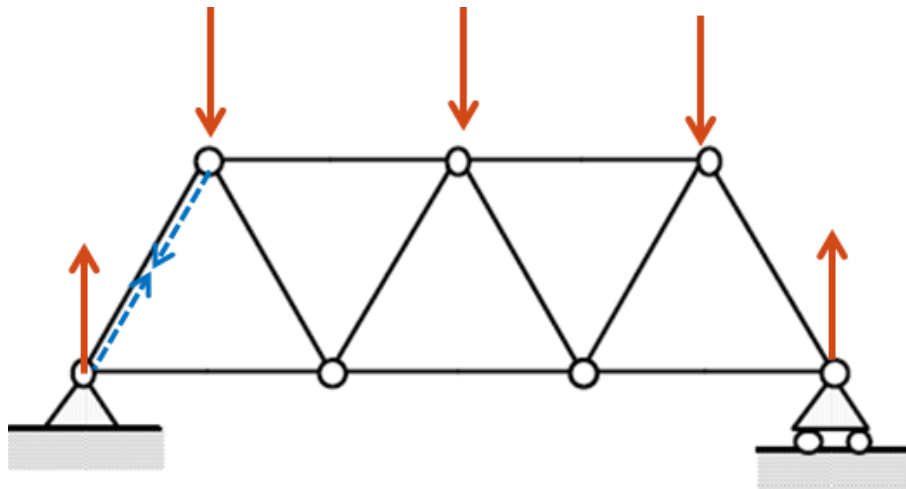


Figure 61 –Efforts externes (—) et Efforts internes (- - -) dans la structure

- **Efforts externes** sont les charges à supporter : le poids propre de la structure, le poids de la neige, le trafic, les réactions d'appuis, ...
- **Efforts internes** : efforts dans les barres,

Ces efforts doivent être déterminés pour pouvoir choisir les matériaux requis dans la réalisation des constructions.

Les pièces trop grosses ne sont pas économiques et les pièces trop petites ne sont pas sécuritaires.

#### Efforts internes: effort normal dans les barres

L'équilibre d'une barre du treillis (AB) montre :

- Que les barres sont soumises seulement à un effort normal (Traction ou compression)
- l'absence de moments fléchissant et d'efforts tranchants dans les barres..

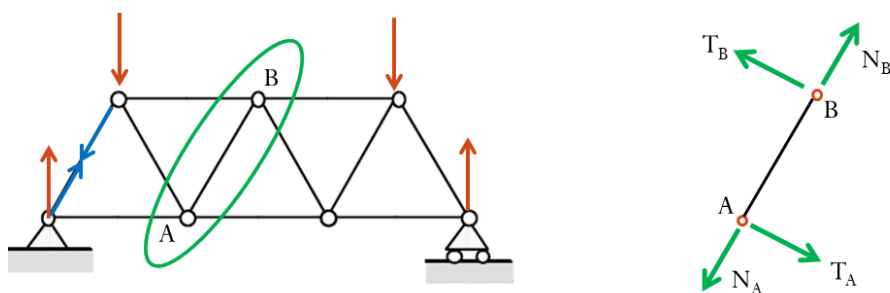


Figure 62 –Mise en évidence de l'effort normal dans les barres.

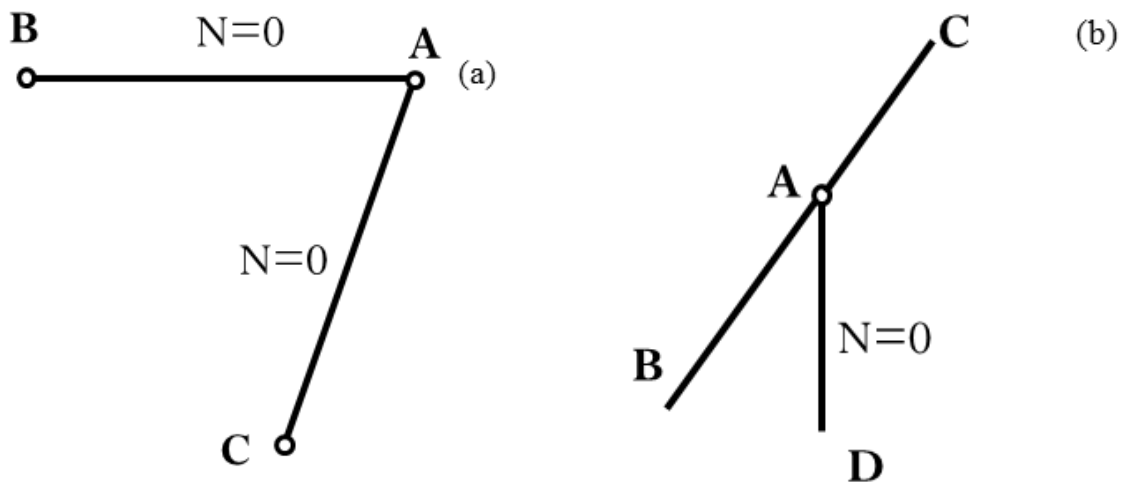
**Barre à effort normal nul  $N=0$** 

Figure 63 –Barres à effort normal.

Deux cas de barres où l'effort normal est nul :

**Cas 1** (Figure 63 .a) : *Si deux barres concourent seules en un nœud non chargé, l'effort normal est nul dans ces barres  $N=0$ .*

En effet, l'équilibre du nœud A montre que  $N(AB)$  et  $N(AC)$  doivent avoir la même direction. Sinon, l'effort normal est nul dans ces barres  $N=0$ .

**Cas 2** (Figure 63 .b) : *Une barre (AD) joignant, en un nœud A non chargé, deux autres barres alignées (AB) et (AC), est le siège d'un effort normal  $N=0$ . De plus  $N(AB)=N(AC)$ .*

En effet l'équilibre du nœud A montre que  $N(AB)$  et  $N(AC)$  doivent avoir la même direction et  $N(AD)=0$ .

**Articulation avec une seule barre**

Si une barre AB s'articule seule en un nœud A avec l'extérieur, la réaction d'appui est de direction AB.

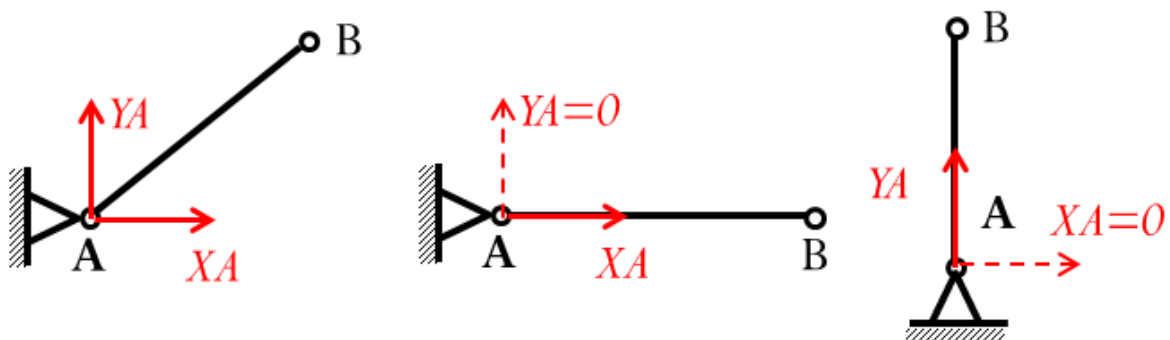


Figure 64. Articulation avec une seule barre

**10.1.2 Nœud articulé et nœud rigide**

La plupart des treillis sont construits avec des nœuds rigides plutôt qu'articulés : Nœuds rigides obtenus par soudage ou par assemblages boulonnés. Dans ce cas :

- des contraintes de flexion apparaissent car les barres doivent fléchir pour suivre le déplacement des nœuds au lieu de tourner librement autour de leurs extrémités.

- les efforts normaux sont quasi identiques;
- les déplacements des nœuds sont quasi identiques; mais l'allure de la déformée est différente,
- des contraintes parasites de flexion se produisent et peuvent être importantes dans certains cas.

### 10.1.3 Hyperstaticité

Un treillis est une structure discrète constituée de **b** barres reliées entre elles aux **n** nœuds de la structure.

Le degré d'hyperstaticité de la structure h est :

$$h = N_i - N_e$$

- $N_e$  : nombre d'équations d'équilibre =  $2n$  (si 2D) ou  $3n$  (si 3D),
- $N_i$  : nombre d'inconnues =  $b + r + m$ 
  - **b** : les efforts normaux dans les b barre du treillis,
  - **r** : Les réactions aux appuis,
  - **m** : le nombre de mouvements d'ensemble (s'il y en a).

Le degré d'hyperstaticité de la structure h devient :

$$h = b + r + m - 2n \quad 10.1$$

### Exemples

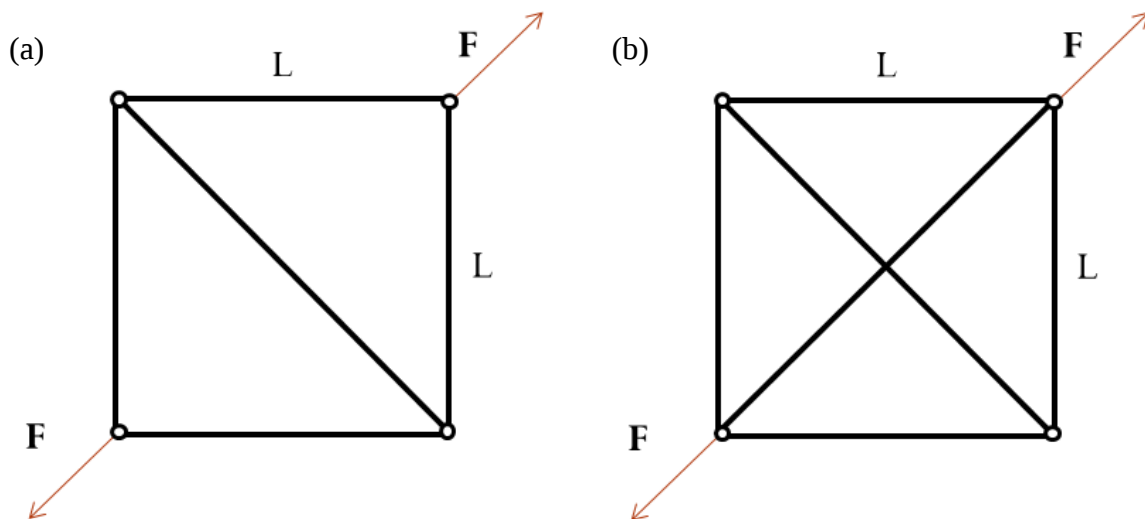


Figure 65 – Exemples de treillis

### Cas de la Figure 65.a

$$h = N_i - N_e = 0$$

Cette structure possède 4 nœuds, le problème est plan, soit :  $N_e = 8$

Il y a 3 mouvements rigides, et 5 barres donc 5 efforts intérieurs inconnus, soit  $N_i = 8$

Cette structure est isostatique, les efforts dans les barres ne dépendent que de la géométrie, ils sont indépendants des caractéristiques mécaniques des barres (section, matériau)

**Cas de la Figure 65.b**

Si on ajoute une barre sur l'autre diagonale, la structure sera hyperstatique de degré 1.

$$h = N_i - N_e = 1$$

Sa rigidité sera plus élevée, et la distribution des efforts interne dépendra des caractéristiques mécaniques des barres.

**10.2 Résolution des treillis isostatiques**

Il existe plusieurs méthodes de résolution des treillis :

**10.2.1 Méthode des sections ou de Ritter**

La méthode des **sections** ou méthode de **Ritter** (Allemagne 1779-1859) : Consiste à isoler des morceaux de structure bien choisis et à écrire leurs équations d'équilibre;

Pour les morceaux isolés : Il faut **au maximum trois efforts inconnus**, soit Trois barres au maximum sont coupées.

**Exemple :**

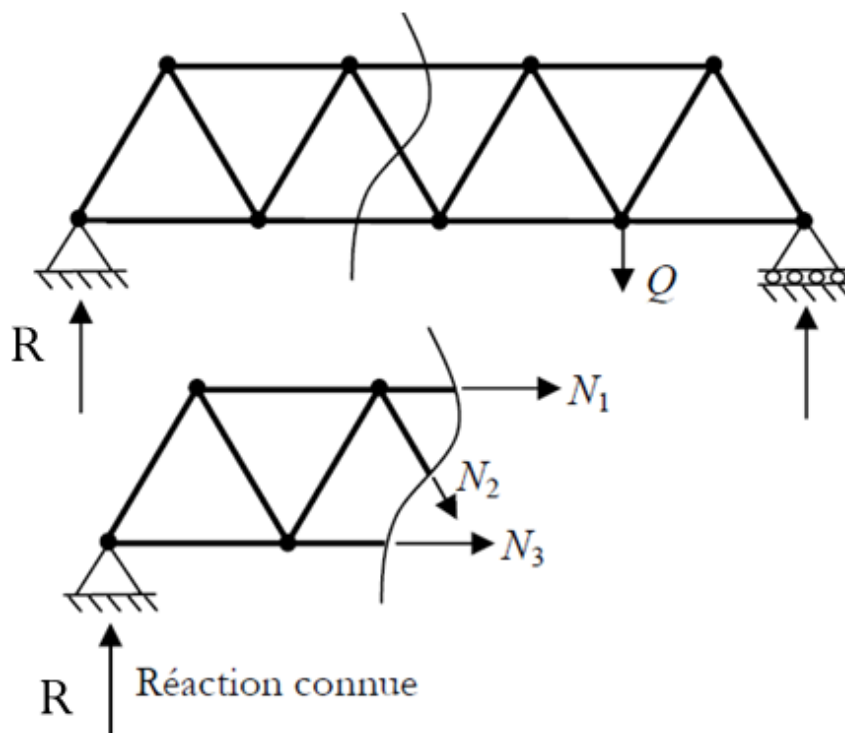


Figure 66 –Principe de la méthode de Ritter

| 3 efforts inconnus | 3 équations d'équilibre disponibles :                                                        | On obtient :                                                                      |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $N_1, N_2, N_3$    | $N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 + R_x = 0$<br>$-N_2 \sin \alpha + R_y = 0$<br>$N_3 h + R d = 0$ | $N_2 = R / \sin \alpha$<br>$N_3 = -R d / h$<br>$N_1 = R d / h - R / \tan(\alpha)$ |

|  |                           |  |
|--|---------------------------|--|
|  | Avec : $R_x = 0, R_y = R$ |  |
|--|---------------------------|--|

### 10.2.2 Méthode des nœuds ou de Cremona

La méthode des nœuds ou de **Cremona** (Italie 1830- 1903) : Consiste à écrire les équations d'équilibre pour chaque nœud; l'un après l'autre.

Pour chaque nœud : Il faut **au maximum deux efforts inconnus**,

**Exemple : Nœud O**

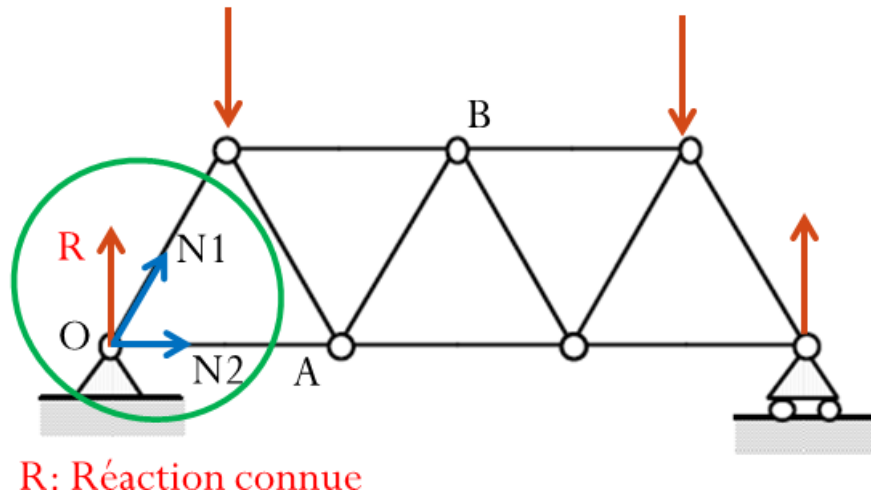


Figure 67 – Principe de la méthode de Cremona

| 2 efforts inconnus | Equations d'équilibre du Nœud O                         | On obtient :                                                           |
|--------------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------|
| $N_1, N_2$         | $N_1 \cos(\alpha) + N_2 = 0$ $N_1 \sin(\alpha) + R = 0$ | $N_1 = -R / \sin(\alpha)$ $N_2 = -N_1 \cos(\alpha) = R / \tan(\alpha)$ |

### 10.2.3 Méthode générale

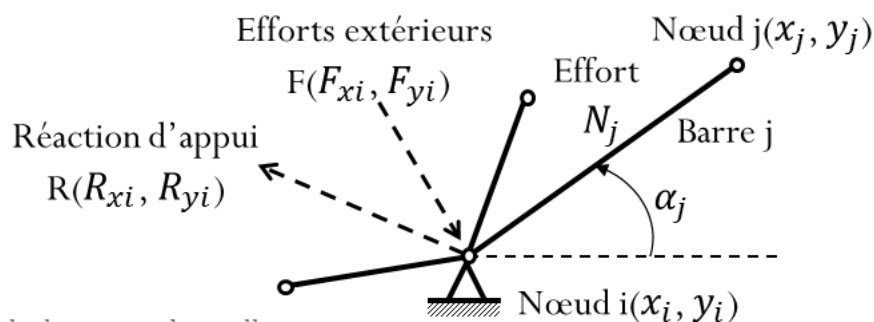


Figure 68 – Principe de la méthode Générale

Exprime l'équilibre de tous les nœuds. Nécessite la résolution d'un système de  $2n$  équations (2 équations par nœud si 2D). Cette méthode est plus intéressante lors d'un calcul par ordinateur.

Prenons le nœud  $i$  ( $i=1$  à  $n$ ) reliant  $b$  barres ( $j=1$  à  $b$ ) de la Figure 68.

L'équilibre du nœud  $i$  s'écrit si pas d'efforts extérieurs ni réaction d'appui :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j N_j \cos \alpha_j = 0 \\ \sum_j N_j \sin \alpha_j = 0 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_j N_j \frac{x_j - x_i}{L_j} = 0 \\ \sum_j N_j \frac{y_j - y_i}{L_j} = 0 \end{array} \right.$$

Si présence d'efforts extérieurs et réaction d'appui, on obtient les 2n équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{xi} + F_{xi} + \sum_j N_j \frac{x_j - x_i}{L_j} = 0 \\ R_{yi} + F_{yi} + \sum_j N_j \frac{y_j - y_i}{L_j} = 0 \end{array} \right.$$

### 10.3 Résolution des treillis hyperstatiques

#### 10.3.1 Méthode des déplacements

Pour les treillis hyperstatiques de degré h, on applique le théorème de Ménabréa (voir Chapitre 7) aux nœuds fixes pour ajouter les h équations manquantes :

$$\delta_k = \frac{\partial W_d}{\partial X_k} = \int_{treillis} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial P_k} ds = \sum_{i=1}^b \frac{N_i L_i}{E_i S_i} n_i = 0 \quad \text{Avec } k \text{ varie de 1 à h} \quad 10.2$$

#### 10.3.2 Méthode des éléments finis

Voir cours des éléments finis.

### 10.4 Post-traitement

#### 10.4.1 Vérification à la limite élastique

Pour que la structure reste dans le domaine élastique, il faudra satisfaire un critère de dimensionnement du type :

$$\left[ \frac{N}{S} \right]_i < R_{ei}$$

$R_{ei}$  : limite élastique conventionnelle du matériau de la barre i

Cependant, des coefficients de sécurité partiels ou coefficients majorateurs (normes Eurocodes) seront appliqués sur les charges extérieures.

#### Exemple :

coefficient majorateur de poids : 1,33,

coefficient majorateur de surcharge climatique (neige) : 1,5

#### 10.4.2 Vérification au flambement

Le flambement élastique est une instabilité beaucoup plus sévère car une barre qui flambe n'absorbe plus d'énergie (instabilité). Le flambement est un phénomène brutal qui se produit

sous de forte charge de compression. Le critère d'instabilité par flambement élastique d'un treillis est relatif à la charge critique d'Euler  $P_c$  définie par l'équation (8.6) :

$$P_c = \frac{\pi^2 E I}{L_f^2}$$

$L_f$  est la longueur de flambement, égale à la longueur des barres entre les nœuds.

Le critère d'instabilité est de la forme :

$$\text{Quel que soit } N_i < 0 : |N_i| < P_{ci}$$

En pratique, pour avoir une réserve de sécurité plastique, on cherchera à avoir :

$$N_{Max} \ll P_{ci}$$

Soit pour une barre donnée :

$$S_i R_{ei} \ll \frac{\pi^2 E I}{L_f^2} \quad \text{ou encore} \quad \lambda = L_f \sqrt{\frac{S}{I}} \ll \pi \sqrt{\frac{E}{R_e}}$$

$\lambda$  : Élancement (sans unité),

$L_f$  est la longueur de flambement, égale à la longueur des barres entre les nœuds.

$I$  : Moment quadratique le plus faible,

$S$  : Aire de la section droite.

$E$  est le module de Young du matériau.

Cette relation donne par exemple la longueur maximale de la barre en fonction du matériau et de la section, pour que le flambement n'ait pas lieu dans le domaine élastique.

### 10.4.3 Déformations des nœuds

- Pour chaque barre du treillis nous pouvons calculer son allongement à partir de l'effort normal en utilisant la loi de comportement du matériau.

$$\varepsilon_{AB} = \left( \frac{\Delta L}{L} \right)_{AB} = \left( \frac{N}{ES} \right)_{AB} \quad \text{soit} \quad (\vec{u}_B - \vec{u}_A) \cdot \vec{e}_{AB} = \left( \frac{NL}{ES} \right)_{AB}$$

La démarche consiste à partir des conditions aux limites, pour de proche en proche utiliser la compatibilité des déformations et des déplacements aux nœuds de la structure.

Ces calculs peuvent devenir longs si le nombre de barres et de nœuds est important.

- La déformation au nœud  $k$  du treillis peut être calculée en utilisant le théorème énergétique de Castigliano (voir Chapitre 7) :

$$\delta_k = \left[ \frac{\partial W_d}{\partial P_k} \right]_{\substack{P_k=0 \\ \text{Si } P_k \text{ fictive}}} = \int_{treillis} \frac{N}{ES} \frac{\partial N}{\partial P_k} ds = \sum_{i=1}^b \frac{N_i L_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial P_k} \quad 10.3$$

**N.B** : Prendre  $P_k = 0$  seulement si  $P_k$  est une charge fictive.

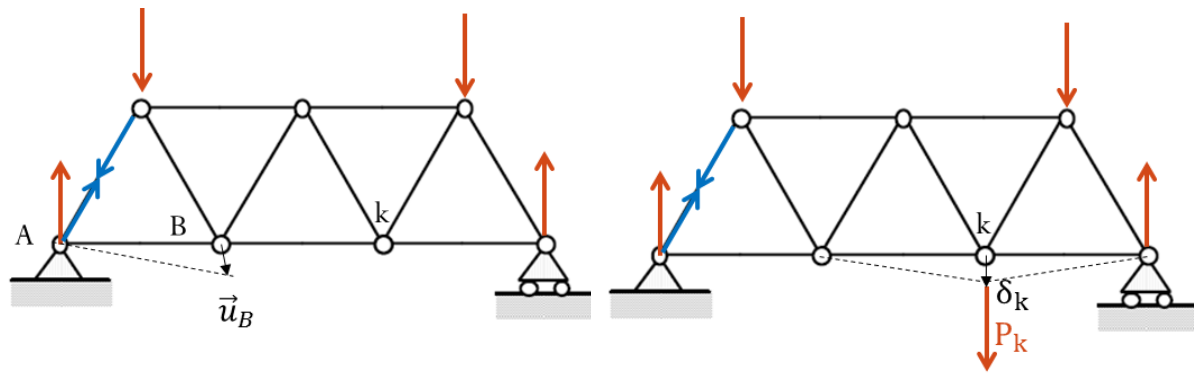


Figure 69 –Déformations des nœuds

# Chapitre 11

## Vibration des systèmes continus.

### Introduction

- En 1850 à Angers (France) : Un pont suspendu s'est effondré par le seul passage au pas cadencé de soldats d'un régiment peu nombreux.
- En 1940 au Tacoma État de Washington (USA) : Un pont suspendu s'est effondré par le seul effet de rafales de vent régulières sans être particulièrement violentes (60 km/h).

### Question légitime :

Comment la simple marche d'un régiment peu nombreux ou des rafales de vent peu violentes peuvent-elles détruire un pont ?

### Réponses

- Il y a résonance lorsque la fréquence imposée par un agent extérieur (rafales de vent ou le pas cadencé) devient égale à la fréquence propre du système mécanique (oscillation libre).
- Ce phénomène se manifeste par des oscillations très fortes pouvant entraîner la destruction du système.
- Les oscillations induites sont bien plus fortes que les oscillations du phénomène qui impose sa fréquence.

### Depuis lors :

- Les codes militaires (monde entier) interdisent aux troupes de marcher au pas sur un pont,
- Dans la construction d'un pont (gratte-ciel aussi), les constructeurs tiennent compte de la fréquence propre de l'ouvrage en lui donnant une valeur différente de celles de rafales de vent.

### Ce chapitre a pour objet l'étude des :

- Vibrations libres de poutres afin de trouver les Fréquences propres et les Modes propres.
- Vibrations forcées de poutres pour éviter le phénomène de résonance.

### Equations aux dérivées partielles : Rappels mathématiques

| Equations aux dérivées partielles     | Solution générale                          |
|---------------------------------------|--------------------------------------------|
| $\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0$ | $T(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ |
| $\frac{d^2 T}{dt^2} - \omega^2 T = 0$ | $T(t) = A e^{\omega t} + B e^{-\omega t}$  |

|                                      |                                                                                                      |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{d^4 T}{dt^4} - \beta^4 T = 0$ | $T(t) = A \operatorname{ch} \beta t + B \operatorname{sh} \beta t + C \cos \beta t + D \sin \beta t$ |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Avec :

A, B, C et D sont des constantes calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.

$$\operatorname{ch} \beta t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} \beta t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

### 11.1 Vibrations longitudinales

Considérons une barre en vibrations longitudinales suivant son axe Ox.

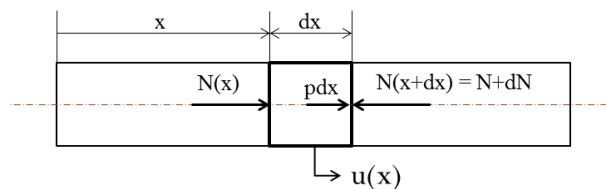


Figure 70 – Barre en vibrations longitudinales.

$u(x, t)$  est le déplacement longitudinal de la section  $S(x)$  d'abscisse  $x$  pendant la vibration longitudinale de la poutre.

$p = p(x, t)$  est une densité de force appliquée sur la barre suivant l'axe Ox.

Le tronçon élémentaire de longueur  $dx$ , soumis à la traction- compression :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad N = -ES\varepsilon = -ES \frac{\partial u}{\partial x} \quad 11.1$$

L'équilibre du tronçon élémentaire de longueur  $dx$  s'écrit :

$$p - \frac{dN}{dx} = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Soit en introduisant l'équation (11.1) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho \frac{S}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{p}{E} = 0 \quad 11.2$$

#### 11.1.1 Vibrations libres

Les vibrations libres sont les mouvements en l'absence de forces extérieures, donc  $p = 0$ . La fonction  $u(x, t)$  est donc une intégrale de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( S \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\rho S}{E} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad 11.3$$

Si la barre possède une section constante :  $S = \text{cte}$ , alors l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad c^2 = \frac{E}{\rho} \quad 11.4$$

**Conditions aux limites possibles**

- déplacement imposé nul aux extrémités :

$$u(0, t) = 0 \quad \text{et / ou} \quad u(L, t) = 0$$

- – effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et / ou} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

**Conditions initiales possibles**

- déplacement imposé quel que soit x :

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \frac{N \cdot x}{E \cdot S}$$

- vitesse imposée nulle quel que soit x :

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t=0} = 0$$

**11.1.2 Fréquences propres et modes propres**

On effectue une séparation des variables, le déplacement  $u(x, t)$  s'écrit :

$$u(x, t) = U(x) \cdot T(t) \quad 11.5$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = cte \quad 11.6$$

On pose :

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = f_1 \quad \text{et / ou} \quad \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = f_2$$

$f_1$  et  $f_2$  sont deux fonctions à variables indépendantes.

La constante  $cte$  est choisie négative pour assurer la stabilité de la solution en temps :

$$\frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{Ou encore :} \quad \begin{cases} \frac{d^2 U}{dx^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 U = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases} \quad 11.7$$

Ces équations donnent les solutions suivantes :

$$\begin{cases} U(x) = A \sin \frac{\omega}{c} x + B \cos \frac{\omega}{c} x \\ T(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t \end{cases} \quad 11.8$$

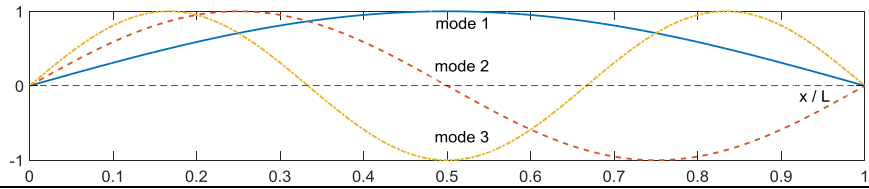
- Les constantes A, B, C et D sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.
- Les  $\omega_i$  solutions des équations (11.8) sont les *pulsations propres*
- Les  $U_i$  sont les *modes propres* associés
- L'équation (11.3) est l'équation caractéristique des modes propres.

### 11.1.3 Exemples

Pour chaque cas de barre, appliquer les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=L$  puis:

- Retrouver les pulsations propres et les modes propres puis dessiner leur allure,
- Retrouver la solution générale des déplacements.

|                                        |                                                                                                   |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Barre libre aux deux extrémités</b> |                                                                                                   |
| Pulsations propres                     | $\omega_i = i \frac{\pi c}{L} = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$                            |
| Modes propres                          | $U_i(x) = \cos \frac{i\pi}{L} x$                                                                  |
| Solution générale                      | $u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \cos \frac{i\pi x}{L} (C_i \sin \omega_i t + D_i \cos \omega_i t)$ |
| <b>Barre encastée-libre</b>            |                                                                                                   |
| Pulsations propres                     | $\omega_i = (2i - 1) \frac{\pi c}{2L} = (2i - 1) \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$            |
| Modes propres                          | $U_i(x) = \sin(2i - 1) \frac{\pi}{2L} x$                                                          |

|                                  |                                                                                                           |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Solution générale                | $u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin(2i - 1) \frac{\pi x}{2L} (C_i \sin \omega_i t + D_i \cos \omega_i t)$ |
| <b>Barre encastrée-encastrée</b> |                         |
| Pulsations propres               | $\omega_i = i \frac{\pi c}{L} = i \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$                                    |
| Modes propres                    | $U_i(x) = \sin \frac{i\pi}{L} x$                                                                          |
| Solution générale                | $u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{L} (C_i \sin \omega_i t + D_i \cos \omega_i t)$         |

### Remarques

Sur les graphes des modes  $U_i$  :

- Les points immobiles sont appelés nœuds. Pour chaque mode  $i$  correspond  $i$  nœuds.
- Les points où les modes sont maximaux sont appelés ventres

#### 11.1.4 Orthogonalité des modes

L'équation caractéristique (11.3) pour les modes propres  $U_i$  peut s'écrire en considérant les solutions des exemples précédents :

$$(ESU_i')' = -\omega_i^2 \rho S U_i$$

En multipliant chaque membre par le mode  $U_j$  et en intégrant sur la barre, on obtient :

$$\int_0^L (ESU_i')' U_j dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S U_i U_j dx \quad 11.9$$

On procède par une intégrale par parties du premier terme de la dernière équation, on obtient :

$$[ESU_i' U_j]_0^L - \int_0^L ESU_i' U_j' dx = -\omega_i^2 \int_0^L \rho S U_i U_j dx$$

Le terme entre crochets est nul par ce qu'aux extrémités ( $x=0$  et  $x=L$ ), la barre est soit encastrée ( $U_j = 0$ ) ou elle est libre ( $U_i' = 0$ ). Il reste :

$$\int_0^L ESU_i'U_j'dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho SU_iU_jdx \quad 11.10$$

On prend cette fois, l'équation caractéristique (11.3) pour les modes propres  $U_j$  :

$$(ESU_j')' = -\omega_j^2 \rho SU_j$$

De la même manière que pour les modes  $U_i$  en multipliant chaque membre par le mode  $U_i$  et en intégrant sur la barre, on obtient :

$$\int_0^L ESU_i'U_j'dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho SU_iU_jdx \quad 11.11$$

Les deux équations (11.10) et (11.11) permettent d'écrire :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L \rho SU_iU_jdx = 0 \quad 11.12$$

Pour  $i \neq j$ ,  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , alors :

$$\int_0^L \rho SU_iU_jdx = 0 \quad \forall i \neq j \quad 11.13$$

Deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur de masse  $\rho S$ .

L'équation (11.13) associée aux équations (11.10) ou (11.11) et (11.9) permettent d'écrire :

$$\int_0^L ESU_i'U_j'dx = - \int_0^L (ESU_i')'U_jdx = 0 \quad i \neq j \quad 11.14$$

Deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur de raideur  $ES$ .

Pour  $\rho S = \text{cte}$  et  $ES = \text{cte}$  et pour deux modes différents on a :

$$\int_0^L U_iU_jdx = \int_0^L U_i'U_j'dx = \int_0^L U_i''U_jdx = 0 \quad \text{Pour } \rho S = \text{cte}, ES = \text{cte et } i \neq j \quad 11.15$$

### 11.1.5 Normalisation

Lorsque  $i = j$ , on normalise le mode  $U_i$  de manière à ce que :

$$\int_0^L \rho SU_i^2dx = 1 \quad 11.16$$

La condition d'orthonormalité des modes peut donc s'écrire :

$$\int_0^L \rho S U_i U_j dx = \delta_{ij} \quad 11.17$$

Avec cette normalisation équation (11.17), les équations (11.9) et (11.10) s'écrivent pour  $i=j$  :

$$\int_0^L E S U_i'^2 dx = - \int_0^L (E S U_i')' U_i dx = \omega_i^2 \quad 11.18$$

### 11.1.6 Exemple

Reprenons l'exemple de la **Barre encastrée-libre** :

On applique les conditions initiales puis en utilisant les propriétés de l'orthogonalité des modes, on retrouve la solution générale des déplacements :

$$u(x, t) = - \frac{8FL}{\pi^2 ES} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i-1)^2} \sin(2i-1) \frac{\pi x}{2L} \cos(\omega_i t)$$

### Vérification :

En statique, le déplacement de la barre  $u(x = L, t = 0)$  est :

$$u(x = L, 0) = \frac{FL}{ES}$$

En dynamique, calculer le déplacement de la barre  $u(x = L, 0)$  pour les 4 premiers modes :

|                           |                                                                                                                         |
|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Le premier mode           | $u(L, t) = - \frac{8FL}{\pi^2 ES} = 0.81 \frac{FL}{ES}$                                                                 |
| Les deux premiers modes   | $u(L, t) = 0.810 \frac{FL}{ES} \left( 1 + \frac{1}{3^2} \right) = 0.900 \frac{FL}{ES}$                                  |
| Les trois premiers modes  | $u(L, t) = 0.81 \frac{FL}{ES} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} \right) = 0.933 \frac{FL}{ES}$                   |
| Les quatre premiers modes | $u(L, t) = 0.81 \frac{FL}{ES} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} \right) = 0.95 \frac{FL}{ES}$    |
| Les n premiers modes      | $u(L, t) = 0.81 \frac{FL}{ES} \left( 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots \right) = \frac{FL}{ES}$ |

### 11.1.7 Vibrations forcées

Lorsque qu'on force la vibration par un effort  $f(x, t)$ , l'équation d'équilibre (11.3) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x, t) = 0 \quad 11.19$$

On cherche une solution décomposée dans la base modale :

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) U_j(x) \quad 11.20$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\rho S \left( \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) U_j(x) \right) - \left( \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) E S U_j'(x) \right)' = f(x, t) \quad 11.21$$

En multipliant chaque membre de l'équation (11.21) par  $U_i$  et en intégrant le long de la barre on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^L \rho S U_i \left( \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) U_j(x) \right) dx - \int_0^L U_i \left( \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) E S U_j'(x) \right)' dx \\ = \int_0^L U_i f(x, t) dx \end{aligned} \quad 11.22$$

On pose :

$$Q_i(t) = \int_0^L U_i f(x, t) dx$$

$Q_i(t)$  est la projection de la force imposée sur le mode  $i$ .

En utilisant les propriétés d'orthonormalité des modes, il reste :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad i = 0 \dots \infty \quad 11.23$$

La résolution du problème de vibrations forcées se ramène à la résolution d'un ensemble de systèmes scalaires à un degré de libertés indépendant.

## 11.2 Vibrations de torsion

Considérons un cylindre en vibrations de torsion suivant son axe  $Ox$ .

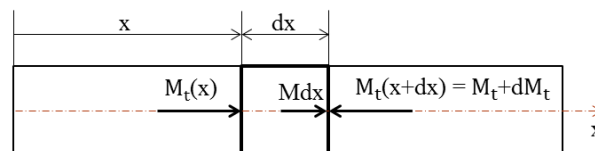


Figure 71 –Cylindre en vibrations de torsion.

$\alpha(x, t)$  est l'angle de rotation autour de l'axe  $Ox$  de la section  $S(x)$  d'abscisse  $x$  pendant la vibration de torsion du cylindre.

$M = M(x, t)$  est une densité de couple suivant l'axe  $Ox$  appliquée au cylindre.

Le tronçon élémentaire de longueur  $dx$ , est soumis à la torsion :

$$\theta = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad M_t = GI_0 \theta \quad 11.24$$

L'équilibre du tronçon élémentaire de longueur  $dx$  s'écrit :

$$\frac{dM_t}{dx} - M = \rho I_0 \ddot{\alpha} \quad 11.25$$

Soit en introduisant les équations 11.24:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( I_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right) - \frac{\rho I_0}{G} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} + \frac{M}{G} = 0 \quad 11.26$$

Cette forme est identique à celle obtenue pour un problème de vibration longitudinale de barre (équation 11.2). Les solutions sont du même type.

### 11.3 Vibrations transversales de flexion

Considérons une poutre d'axe  $Ox$  en vibrations de flexion suivant l'axe  $Oy$ .

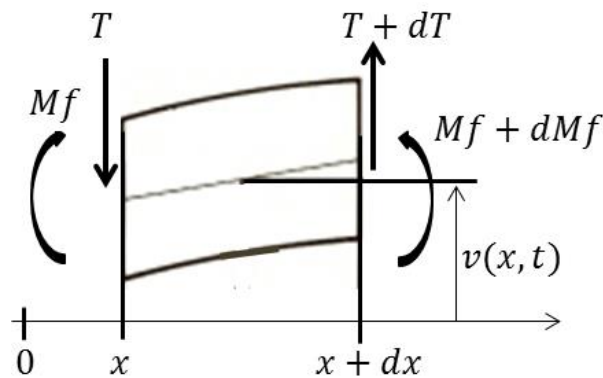


Figure 72 –Poutre en vibrations transversales de flexion.

$v(x, t)$  est déplacement transversal de la section  $S(x)$  d'abscisse  $x$  pendant la vibration de flexion de la poutre.

Le tronçon élémentaire de longueur  $dx$ , soumis à la flexion simple :

Le déplacement transversal :  $v(x, t)$

La rotation de la section (hypothèse de Bernoulli) :  $\dot{v}(x, t) = \frac{\partial v}{\partial x} = \alpha(x, t)$

La courbure (équation 4.7) :  $\ddot{v}(x, t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{1}{R}$

L'équation de la déformée (équation 4.8) :  $M_f = EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

Relation Effort tranchant- moment de flexion (équation 1.5) :  $T = - \frac{\partial M_f}{\partial x}$

Théorème de la résultante dynamique appliqué sur le tronçon élémentaire de longueur  $dx$  :

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad 11.27$$

L'équation (1.5) dans l'équation (11.27) donne :

$$\frac{\partial^2 M_f}{\partial x^2} + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad 11.28$$

En introduisant l'équation (4.8), on obtient finalement :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad 11.29$$

### Conditions aux limites possibles

- déplacement imposé nul aux extrémités :

$$v(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad v(L, t) = 0$$

- – Rotation imposée nulle aux extrémités :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0$$

- – Moment imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(L, t) = 0$$

- – effort imposé nul aux extrémités :

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0, t) = 0 \quad \text{et/ou} \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(L, t) = 0$$

#### 11.3.1 Fréquences et modes propres

On effectue une séparation des variables :

$$v(x, t) = V(x) \cdot T(t) \quad 11.30$$

L'équation d'équilibre (11.29) devient :

$$\frac{EI}{\rho S} \frac{1}{V} \frac{d^4 V}{dx^4} = - \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = cte \quad 11.31$$

On a égalité de deux fonctions de variables indépendantes. Les deux fonctions sont donc égales à une constante choisie positive pour assurer la stabilité de la solution en temps :

$$\frac{EI}{\rho S V} \frac{d^4 V}{dx^4} = -\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = +\omega^2 \quad 11.32$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \frac{d^4 V}{dx^4} - \beta^4 V = 0 \\ \frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad 11.33$$

Ces équations donnent les solutions suivantes :

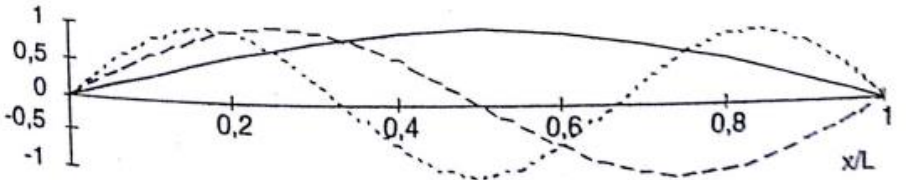
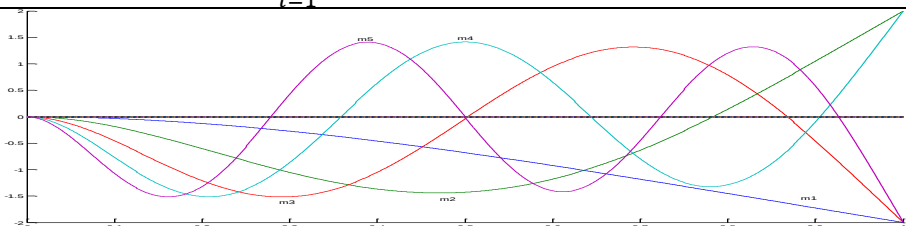
$$\begin{cases} V(x) = A \cosh \beta x + B \sinh \beta x + C \cos \beta x + D \sin \beta x \\ T(t) = E \cos \omega t + F \sin \omega t \end{cases} \quad \text{Avec} \quad \beta^4 = \frac{\omega^2}{\alpha^2} = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad 11.34$$

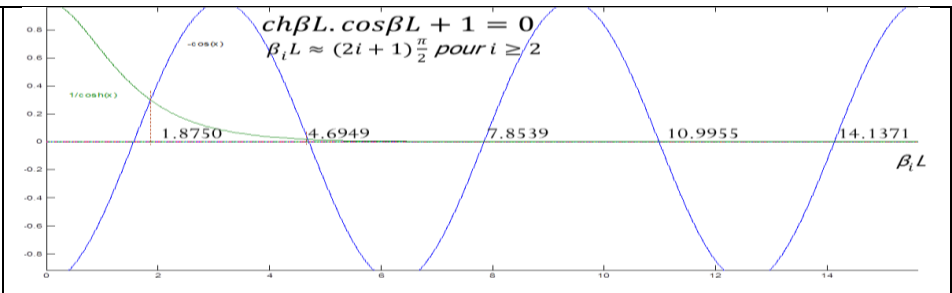
- Les constantes A, B, C et D sont calculées à partir des conditions initiales et des conditions aux limites.
- Les  $\omega_i$  solutions des équations (11.34) sont les *pulsations propres*
- Les  $V_i$  sont les *modes propres* associés
- L'équation (11.29) est l'équation caractéristique des modes propres.

### 11.3.2 Exemples

Pour chaque cas de barre, appliquer les conditions aux limites en  $x=0$  et  $x=L$  puis:

- Retrouver les pulsations propres et les modes propres puis dessiner leur allure,
- Retrouver la solution générale des déplacements.

|                                 |                                                                                                   |                                                     |
|---------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| <b>Poutre en appuis simples</b> |               |                                                     |
| Pulsations propres              | $\beta_i = \frac{i\pi}{L}$                                                                        | $\omega_i = i^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S L^4}}$ |
| Modes propres                   | $V_i(x) = \sin \frac{i\pi}{L} x$                                                                  |                                                     |
| Solution générale               | $v(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{i\pi x}{L} (E_i \cos \omega_i t + F_i \sin \omega_i t)$ |                                                     |
| <b>Barre encastrée-libre</b>    |               |                                                     |

| Pulsations propres | <div><div></div></div>                                                                                                                                                                                                                                                                      |            |         |         |         |         |         |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Modes propres      | <div><div><math display="block">V_i(x) = A_i ch\beta_i x + B_i sh\beta_i x - A_i cos\beta_i x - B_i sin\beta_i x</math><math display="block">= -A_i(cos\beta_i x + a_i sin\beta_i x - ch\beta_i x - a_i sh\beta_i x)</math><table><tr><th><math>\alpha_i</math></th><td>-0.7340</td><td>-1.0184</td><td>-0.9992</td><td>-1.0000</td><td>-0.9999</td></tr></table></div></div> | $\alpha_i$ | -0.7340 | -1.0184 | -0.9992 | -1.0000 | -0.9999 |
| $\alpha_i$         | -0.7340                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | -1.0184    | -0.9992 | -1.0000 | -0.9999 |         |         |
| Solution générale  | <div><div><math display="block">u(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} = -A_i(cos\beta_i x + a_i sin\beta_i x - ch\beta_i x - a_i sh\beta_i x)(E_i cos \omega_i t + F_i sin \omega_i t)</math></div></div>                                                                                                                                                                              |            |         |         |         |         |         |

### 11.3.3 Orthogonalité des modes

L'équation caractéristique (11.29) pour les modes propres  $V_i$  peut s'écrire :

$$(EIV_i'')'' = \omega_i^2 \rho S V_i$$

En multipliant chaque membre par le mode  $V_j$  et en intégrant sur la barre, on obtient :

$$\int_0^L (EIV_i'')'' V_j dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S V_i V_j dx \quad 11.35$$

On procède par une double intégrale par parties du premier terme de la dernière équation, on obtient :

$$[(EIV_i'')' V_j]_0^L - [EIV_i'' V_j']_0^L + \int_0^L EIV_i'' V_j'' dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S V_i V_j dx$$

Les termes dans le premier crochet sont nuls par ce qu'aux extrémités ( $x=0$  et  $x=L$ ), la barre est soit bloquée ( $V_j = 0$ ) soit libre d'effort ( $V_j'' = 0$ ).

Les termes dans le deuxième crochet sont aussi nuls par ce qu'aux extrémités ( $x=0$  et  $x=L$ ), la barre est soit encastree ( $V_j' = 0$ ) soit non (moment nul) ( $V_j'' = 0$ ).

Il reste :

$$\int_0^L EIV_i'' V_j'' dx = \omega_i^2 \int_0^L \rho S V_i V_j dx \quad 11.36$$

On prend cette fois, l'équation caractéristique (11.29) pour les modes propres  $V_j$  :

$$(EIV_j'')'' = \omega_j^2 \rho S V_j$$

De la même manière que pour les modes  $V_i$  en multipliant chaque membre par le mode  $V_i$  et en intégrant sur la barre, on obtient :

$$\int_0^L EIV_i'' V_j'' dx = \omega_j^2 \int_0^L \rho S V_i V_j dx \quad 11.37$$

Les deux équations (11.36) et (11.37) permettent d'écrire :

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L \rho S V_i V_j dx = 0 \quad 11.38$$

Pour  $i \neq j$ ,  $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ , alors :

$$\int_0^L \rho S V_i V_j dx = 0 \quad \forall i \neq j \quad 11.39$$

Deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur de masse  $\rho S$ .

L'équation (11.39) associée aux équations (11.35) et (16.42) ou (11.37) permettent d'écrire :

$$\int_0^L (EIV_i'')'' V_j dx = \int_0^L EIV_i'' V_j'' dx = 0 \quad i \neq j \quad 11.40$$

Deux modes différents sont orthogonaux par rapport à l'opérateur de raideur  $EI$ .

Pour  $\rho S = \text{cte}$  et  $EI = \text{cte}$  et pour deux modes différents on a :

$$\int_0^L V_i V_j dx = \int_0^L V_i'''' V_j dx = \int_0^L V_i'' V_j'' dx = 0 \quad \text{Pour } \rho S = \text{cte}, EI = \text{cte et } i \neq j \quad 11.41$$

#### 11.3.4 Normalisation

Lorsque  $i = j$ , on normalise le mode  $U_i$  de manière à ce que :

$$\int_0^L \rho S V_i^2 dx = 1 \quad 11.42$$

La condition d'orthonormalité des modes peut donc s'écrire :

$$\int_0^L \rho S V_i V_j dx = \delta_{ij} \quad 11.43$$

Avec cette normalisation équation (11.43) les équations (11.35) et (11.36) s'écrivent pour  $i=j$  :

$$\int_0^L EIV_i''^2 dx = \int_0^L (EIV_i'')'' V_i dx = \omega_i^2 \quad 11.44$$

#### 11.3.5 Exemples

Reprenons l'exemple de la **Poutre en appuis simples** :

On applique les conditions initiales puis en utilisant les propriétés de l'orthogonalité des modes, on retrouve la solution générale des déplacements :

$$v(x, t) = \frac{2FL^3}{\pi^4 EI} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^4} \sin \frac{i\pi}{2} \cdot \sin \frac{i\pi x}{L} \cos \omega_i t$$

### Vérification :

En statique, la déformée en milieu de la poutre est :

$$v\left(x = \frac{L}{2}, 0\right) = \frac{FL^3}{48EI}$$

En dynamique, calculer le déplacement de la barre  $u(x = L, 0)$  pour les 3 premiers modes :

|                          |                                                                                                                   |
|--------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Le premier mode          | $u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{FL^3}{48.7EI}$                                                              |
| Les deux premiers modes  | $u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{FL^3}{48.11EI}$                                                             |
| Les trois premiers modes | $u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{FL^3}{48.03EI}$                                                             |
| Les n premiers modes     | $v\left(x = \frac{L}{2}, t\right) = \frac{2FL^3}{EI\pi^4} \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right)$ |

### 11.3.6 Vibrations forcées

Lorsque qu'on force la vibration par un effort  $f(x, t)$ , l'équation d'équilibre (11.29) devient :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t) \quad 11.45$$

On cherche une solution décomposée dans la base modale :

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) V_j(x) \quad 11.46$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\rho S \left( \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) V_j(x) \right) + \left( \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) EI V_j''(x) \right)'' = f(x, t) \quad 11.47$$

En multipliant chaque membre de l'équation (11.21) par  $V_i$  et en intégrant le long de la barre on obtient :

$$\int_0^L \rho S V_i \left( \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) V_j(x) \right) dx + \int_0^L V_i \left( \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) E I V_j''(x) \right)'' dx = \int_0^L V_i f(x, t) dx \quad 11.48$$

On pose :

$$Q_i(t) = \int_0^L V_i f(x, t) dx$$

$Q_i(t)$  est la projection de la force imposée sur le mode  $i$ .

En utilisant les propriétés d'orthonormalité des modes, il reste :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad i = 0 \dots \infty \quad 11.49$$

La résolution du problème de vibrations forcées se ramène à la résolution d'un ensemble de systèmes scalaires à un degré de libertés indépendant.

### 11.4 Méthodes approchées

Souvent un problème de vibrations est difficile à résoudre. Dans de tels cas, on fait recours aux méthodes approchées telles que la méthode de Rayleigh, la méthode de Rayleigh- Ritz ou la méthode des éléments finis.

#### 11.4.1 Energie cinétique et énergie potentielle

**Énergie cinétique :**

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \dot{q}^2(t) \int_0^L \frac{1}{2} \rho S U^2 dx \quad 11.50$$

**Énergie potentielle ou énergie de déformation :**

L'énergie potentielle ou l'énergie de déformation s'exprime par Equation (7.6) :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} \cdot dx \quad \text{Cas de vibrations longitudinales} \quad 11.51$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} \cdot dx \quad \text{Cas de vibrations longitudinales de flexion}$$

#### 11.4.2 Méthode de Rayleigh : Approximation de la fréquence fondamentale

Un mode de vibration s'exprime sous la forme :

$$u(x; t) = q(t) \cdot U(x) \quad \text{Avec} \quad q(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad 11.52$$

$\omega$  est la pulsation propre et  $U(x)$  est le mode propre.

Dans ce cas, l'énergie cinétique s'exprimera par :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \rho S \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = \dot{q}^2(t) \int_0^L \frac{1}{2} \rho S U^2 dx \quad 11.53$$

Et l'énergie potentielle ou l'énergie de déformation s'exprimera par :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{N^2}{ES} \cdot dx = q^2(t) \int_0^L \frac{1}{2} ES \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx \quad \text{Cas de vibrations longitudinales}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M_{fz}^2}{EI_{Gz}} \cdot dx \quad \text{Cas de vibrations longitudinales de flexion} \quad 11.54$$

$$= q^2(t) \int_0^L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)^2 dx$$

Dans un système conservatif, l'énergie mécanique est constante :

$$E_M = E_p + E_c = cte \quad \text{Ou encore} \quad \frac{\partial}{\partial x} (E_p + E_c) = 0 \quad 11.55$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L \frac{1}{2} ES (U')^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \rho S U^2 dx} = R(U) \quad \text{Cas de vibrations longitudinales} \quad 11.56$$

$$\omega^2 = \frac{\int_0^L \frac{1}{2} EI (V'')^2 dx}{\int_0^L \frac{1}{2} \rho S V^2 dx} = R(U) \quad \text{Cas de vibrations longitudinales de flexion}$$

$R(U)$  est le quotient de Rayleigh de  $U$ . Il ne dépend que de la forme de  $U(x)$

### Approximation de Rayleigh

On considère  $U_a$  une approximation du mode exacte  $U(x)$ .

L'approximation  $U_a$  de  $U(x)$  doit être cinématiquement admissible : satisfait aux conditions aux limites géométriques du problème.

Dans ce cas la pulsation approchée  $\omega'_0$  est :

$$\omega'^2_0 = R(U_a) \quad 11.57$$

### Remarques

- On montre que la pulsation fondamentale (premier mode) du système  $\omega_0$  est inférieure ou égale à la pulsation approchée  $\omega'_0$  :

$$\omega^2_0 = R(U_0) \leq \omega'^2_0 = R(U_a) \quad 11.58$$

$U_0$  est le mode propre fondamentale du système (premier mode).

- La fréquence fondamentale du système  $f_0$  est inférieure ou égale à la fréquence approchée  $f'_0$

$$f_0 \leq f'_0 = \frac{\sqrt{R(U_a)}}{2\pi} \quad 11.59$$

- Le choix de la forme de  $U_a$  joue un rôle important dans l'approximation.
- $U_a$  doit avoir un sens physique
- Des choix possibles de forme approchée  $U_a$  sont :
  - Solution exacte d'un problème voisin,
  - Déformée statique de la structure sous son poids propre

## Exemples

### Vibrations longitudinales Barre + ressort

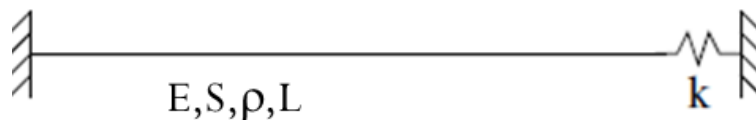


Figure 73 –Vibrations longitudinales de Barre + ressort

|                                                                                                                   |                                              |                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Pulsations exactes (numériques)                                                                                   | $\omega_0 = 2.029 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ | $\omega_1 = 4.913 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ |
| Rayleigh : premier mode de la même poutre libre à droite ( $\Delta_r = 4\%$ )<br>$U_a(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$ | $\omega'_0 = 2.11 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ |                                              |

### Vibrations transversale d'un pont

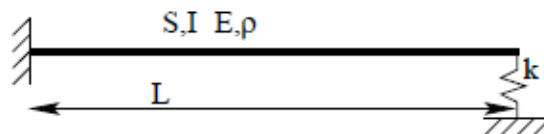


Figure 74 –Vibrations transversale d'un pont

Un pont est composé d'une simple dalle de béton de largeur  $b = 2\text{m}$ , longueur  $L = 20\text{m}$  épaisseur  $h = 50\text{cm}$ ,  $E = 35\text{GPa}$ ;  $\rho = 2500\text{kg/m}^3$ . La dalle est encastrée à gauche dans une zone rocheuse et appuyée à droite sur le sol.

**Modèle1** : Le sol d'appui de la dalle est considéré mou.

- Dalle encastré- libre

|                                                                                                                                |                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Solution exacte :                                                                                                              | $\omega_0^2 = 1.875^4 \frac{EI}{\rho S L^4}$ $f_0 = 0.755 \text{ Hz}$ |
| Approximation très grossière ( $\Delta_r = 27\%$ )<br>$v(x) = x^2$                                                             | $\omega_0' = 6.04 \text{ rd/s}$ $f_0' = 0.961 \text{ Hz}$             |
| Approximation RDM ( $\Delta_r = 1.45\%$ )<br>$v(x) = \frac{F}{EI} \left( \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)$<br>$\equiv 1$ | $\omega_0'' = 4.816 \text{ rd/s}$ $f_0'' = 0.766 \text{ Hz}$          |

- Dalle encastrée-libre avec son propre poids (pris uniformément réparti)

|                                                                                                                                                                        |                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| Approximation RDM poids réparti ( $\Delta_r = 0.4\%$ )<br>$v(x) = \frac{\rho S}{2EI} \left( \frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$<br>$\equiv 1$ | $\omega_0''' = 4.766 \text{ rd/s}$ $f_0''' = 0.758 \text{ Hz}$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|

**Modèle2 :** Le sol d'appui de la dalle est considéré comme élastique de raideur k.

- Dalle encastrée-libre avec son propre poids + appui élastique à droite

|                                                                                                                                                                                                       |                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| Approximation (RDM)<br>Raideur $k = 10^6 \text{ N/m}$ ( $\Delta_r = 2.70\%$ )<br>$v(x) = \frac{\rho S}{2EI} \left( \frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$<br>$\equiv 1$         | $f_0(EF) = 1.554 \text{ Hz}$ $f_0 = 1.596 \text{ Hz}$             |
| Approximation (RDM).<br>Appui trop raide $k = 10^7 \text{ N/m}$ ( $\Delta_r = 65\%$ )<br>$v(x) = \frac{\rho S}{2EI} \left( \frac{L^2 x^2}{2} - \frac{Lx^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right)$<br>$\equiv 1$ | $f_0(EF) = 2.890 \text{ Hz}$ $f_0 = 4.506 \text{ Hz} \gg f_0(EF)$ |

### 11.4.3 Méthode de Rayleigh- Ritz : Approximation des premières fréquences

La méthode de Rayleigh-Ritz consiste à chercher une **approximation des modes de vibration** dans un espace de **dimension N** engendré par **N** fonctions  $\phi_i$  **choisies**.

On cherche des solutions de la forme :

$$W(x, y, z) = \sum_{i=1}^N q_i \phi_i(x, y, z) = \{q\}^T \{\phi\} \quad \text{avec} \quad \{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \{\phi\} = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{Bmatrix} \quad 11.60$$

La forme quadratique de **W(x, y, z)**:

$$W^2 = \{q\}^T [A] \{q\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} q_i q_j \quad 11.61$$

Le quotient de Rayleigh dépend uniquement des  $q_i$  et peut être mis sous la forme d'un rapport de deux formes quadratiques :

$$R(W) = \frac{\{q\}^T K \{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} = \omega^2 \quad 11.62$$

Où  $K$  est appelé matrice de **raideur** et  $M$  matrice de **masse**.

On minimise le quotient de Rayleigh par rapport aux paramètres  $q_i$  :

$$\frac{\partial R}{\partial \{q\}} = 0 \quad \text{Ce qui donne} \quad \frac{K\{q\} - \omega^2 M\{q\}}{\{q\}^T M \{q\}} = 0 \quad 11.63$$

Les quantités  $\omega_i$  qui assurent le minimum du quotient de Rayleigh sont donc les termes qui annulent le déterminant :

$$|K - \omega^2 M| = 0 \quad 11.64$$

On peut montrer que  $\omega_i$  est une approximation par l'excès de la  $i$ ème fréquence propre du système.

Les vecteurs  $\{q_i\}$ , associés aux  $\omega_i$ , qui sont solutions du problème aux valeurs propres se déduisent par l'équation :

$$[K - \omega^2 M]\{q\} = 0 \quad 11.65$$

Les vecteurs  $\{q_i\}$  trouvés donnent les approximations des  $N$  premiers modes propres du système (équation 11.60).

### Approximation de Rayleigh- Ritz

- La qualité de l'approximation des modes décroît avec  $i$ ,
- La qualité de l'approximation des pulsations est meilleure que celle de l'approximation des modes,
- La qualité de l'approximation augmente avec la dimension de la base  $N$ .

### Exemples

#### Vibrations longitudinales Barre + ressort (Figure 73)

|                                                                                                                   |                                                                      |                                              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|
| Pulsations exactes (numériques)                                                                                   | $\omega_0 = 2.029 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$                         | $\omega_1 = 4.913 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ |
| Rayleigh : premier mode de la même poutre libre à droite ( $\Delta_r = 4\%$ )<br>$U_a(x) = \sin \frac{\pi x}{2L}$ | $\omega_0' = 2.11 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$<br>( $\Delta_r = 4\%$ ) |                                              |

|                                                                                                                                                             |                                                                      |                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| <p>Rayleigh-Ritz 2D par les 2 premiers modes de la poutre libre à droite :</p> $\phi_1(x) = \sin \frac{\pi x}{2L} \quad \phi_2(x) = \sin \frac{3\pi x}{2L}$ | $\omega_1'' = 2.066 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ $(\Delta_r = 1.82\%)$ | $\omega_2'' = 4.940 \sqrt{\frac{E}{\rho L^2}}$ $(\Delta_r = 0.55\%)$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|

**Remarque**

La méthode du quotient de Rayleigh en 2D permet une meilleur approximation par rapport à la méthode en 1D