

Mécanique des structures

Théorie des poutres

Généralités et notions de base

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

1. But

Construire dans les meilleures conditions



Contraintes
Et

Déformations

???

???

Actions de
forces
extérieures



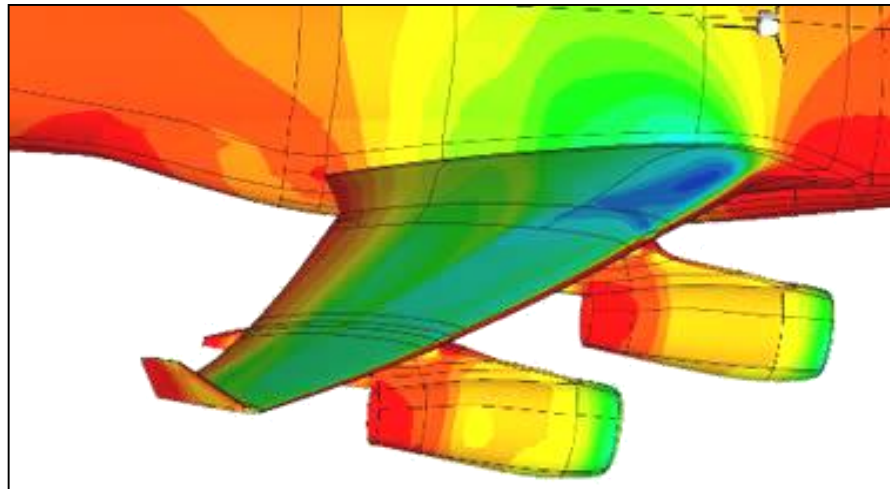
Établir les relations qui existent entre :
Contraintes, déformations et forces extérieures
en tenant compte des :
dimensions et propriétés des matériaux,

1. But

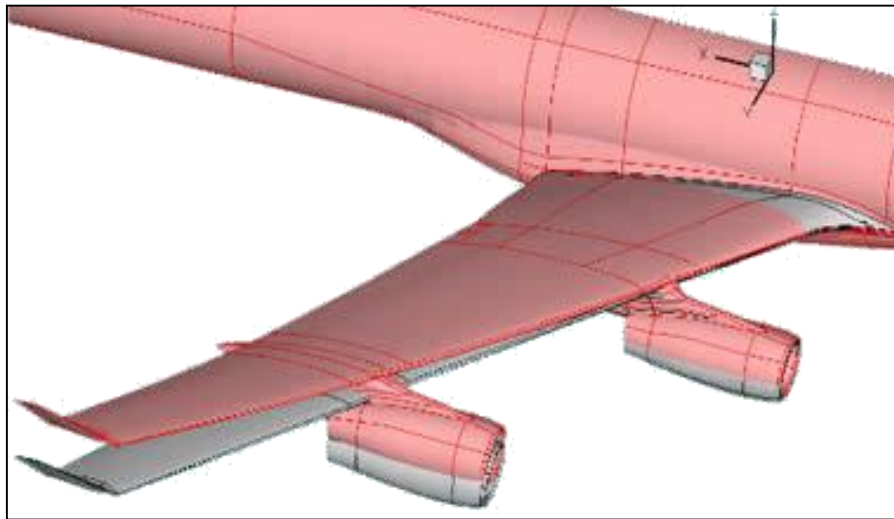
- Calcul de résistance
- Calcul de rigidité
- Calcul de vérification
- Choix du matériaux

il faut déterminer les dimensions d'une pièce pour :

- qu'elle **résiste** aux diverses forces externes
- et que les **contraintes internes** (en tout point) ne dépassent pas certaines limites.



Les déformations doivent être inférieure à une déformation maximale exigée.



Certaines dimensions peuvent être imposées par le montage, il faudra donc vérifier si ces dimensions conviennent :

- soit en fonctions des sollicitations
- Soit en fonction des déformations.



Dans certains problèmes,
ou les **dimensions** ou la **masse** ou les **déformations**
sont limitées (avions par exemples) :
c'est la nature du matériau qui sera l'inconnue.

Il faut **choisir** le matériau ou le **vérifier** d'après les
charges appliquées,

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

2. Hypothèses

Sont de 4 types :

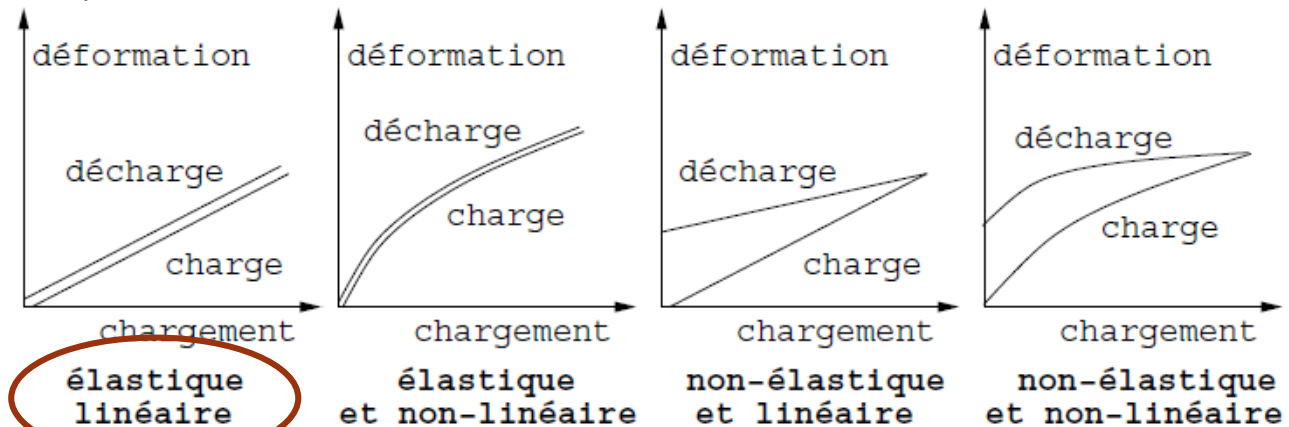
1. Sur le matériau,
2. Sur la disposition de la matière,
3. Sur les forces extérieures,
4. Sur les déformations.

Le matériau est :

- **Homogène** : il a les mêmes propriétés en tout point
- **Isotrope** : en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions.

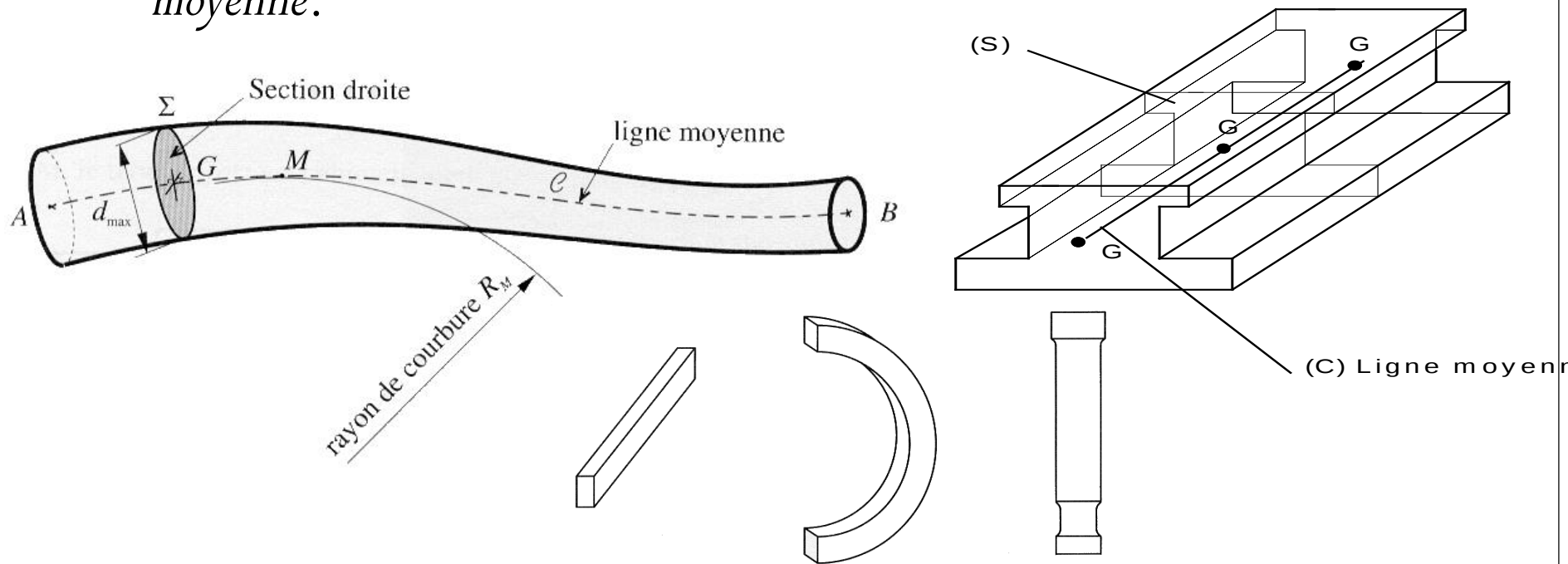
Le comportement du matériau est :

- **Linéaire** : les relations entre les contraintes et les déformations sont linéaires.
- **Élastique** : le solide reprend sa forme initiale si les forces appliquées sont supprimées.



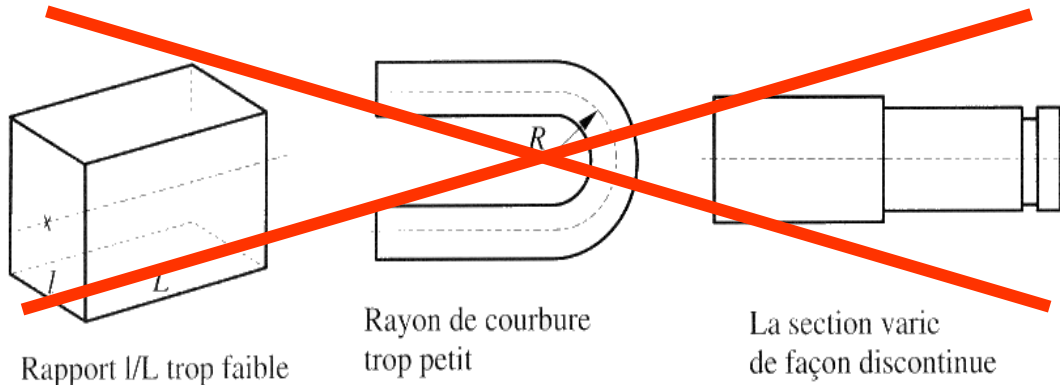
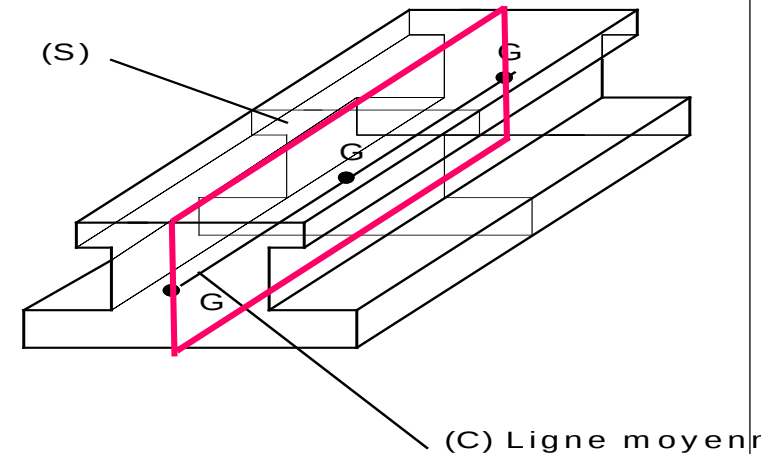
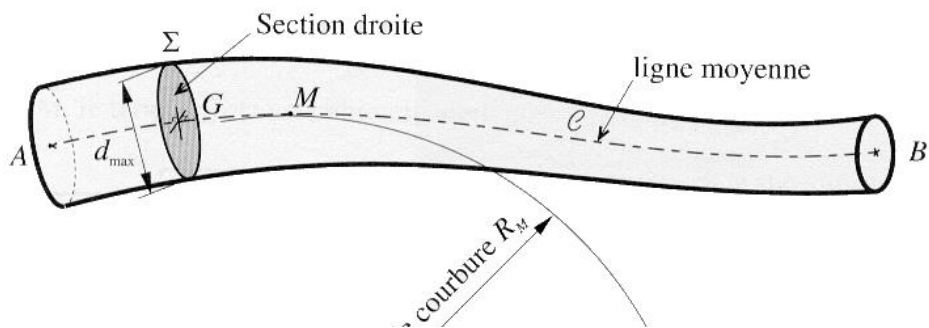
On étudie des pièces (poutres) dont les formes sont relativement simples.

Poutre : un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*.



Les caractéristiques de la poutre sont :

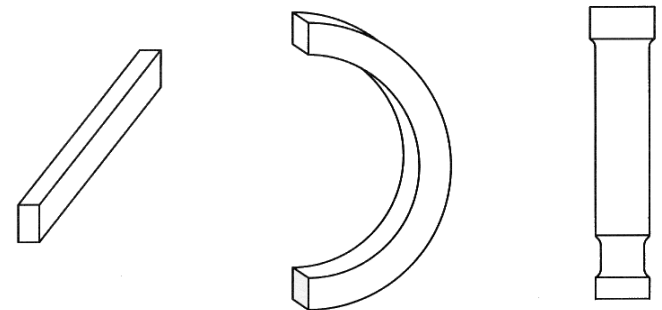
- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure $R > 5 \cdot D_{\max}$.
- section droite (S) constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- existence d'un plan de symétrie.



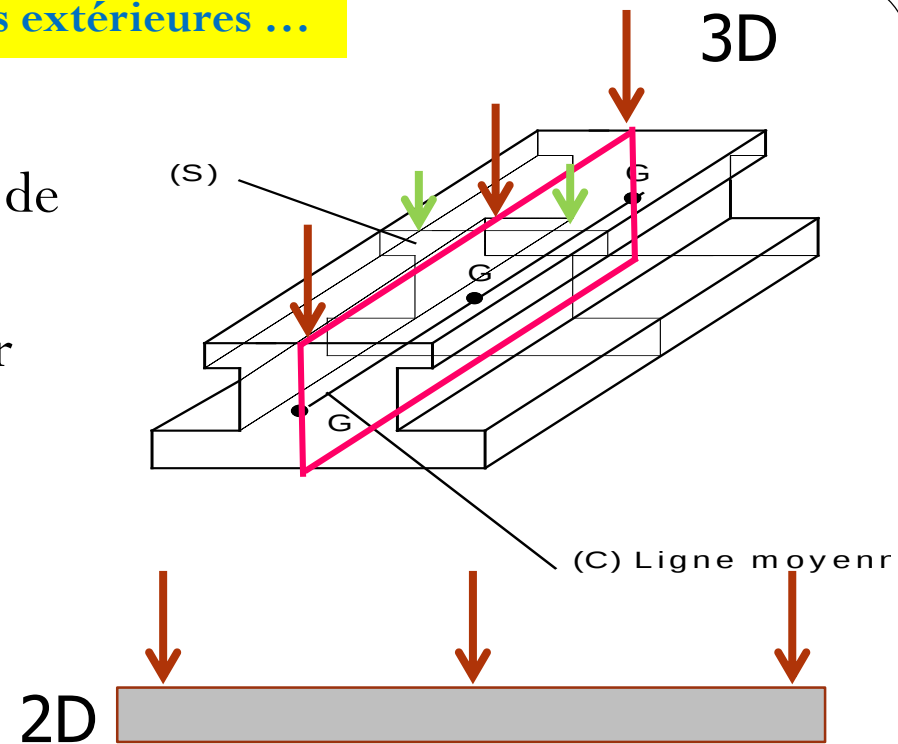
Rapport l/L trop faible

Rayon de courbure trop petit

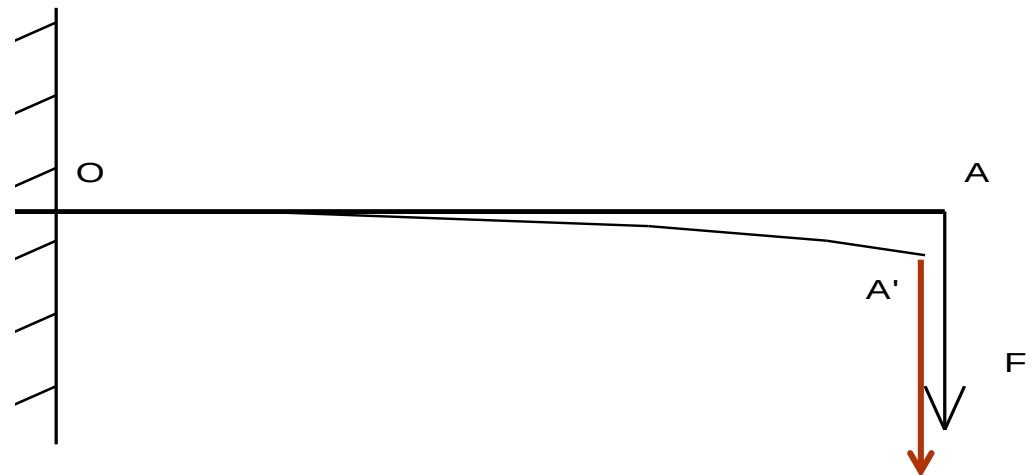
La section varie de façon discontinue

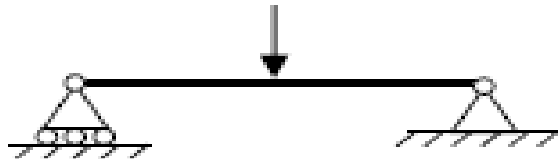
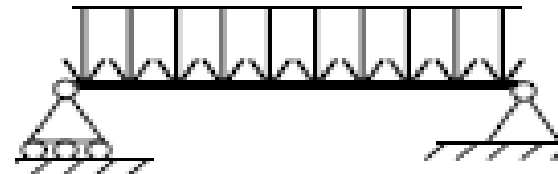


Plan de symétrie : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.



Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, Les supports des forces seront eux considérés comme constants.



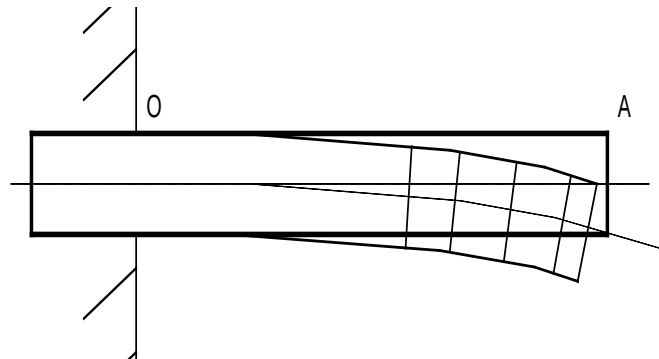
Types	Situation réelle	Modélisation
Ponctuelles (N)		
Réparties (N/m)		
Forces de volume (poids propre) (N/m ²)		

- **HPD:**

les déformations sont petites par rapport aux dimensions de la poutre

- **Hypothèses de Navier & Bernoulli :**

Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

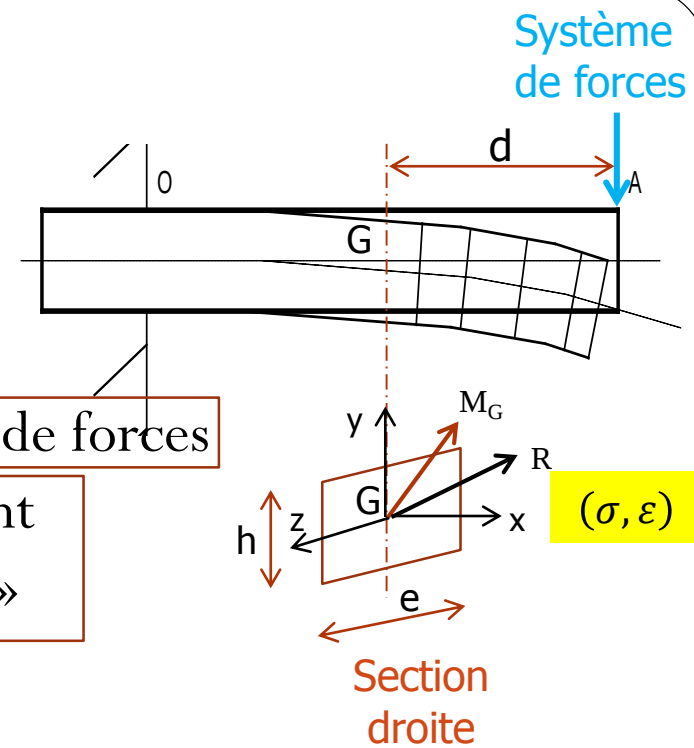


Principe de St Venant

« Les contraintes (et déformations) dans une section droite

éloignée des points d'application d'un système de forces

ne dépendent que de la résultante et du moment résultant au centre de gravité de cette section. »



Conséquences :

- La valeur des contraintes (et déformations) sont valables loin des points d'application des forces. On considère les résultats valables qu'au-delà d'une distance d de 2 à 3 fois la plus grande dimension transverse de la section.
- Quel que soit la nature d'un système de force, seul le torseur résultant des efforts de cohésion au centre de gravité G de la section $\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}$ détermine l'état de celle-ci.

$$d > 2 \text{ à } 3 \sup(h, e)$$

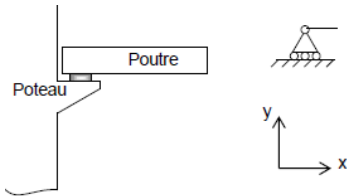
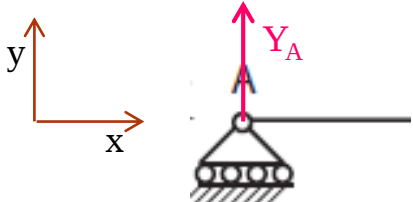
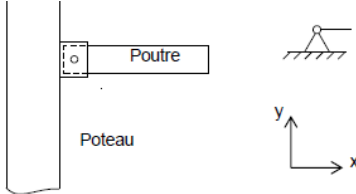
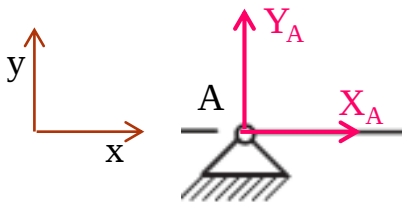
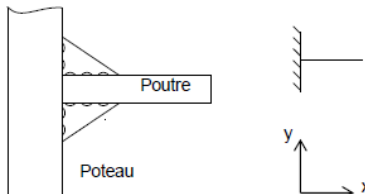
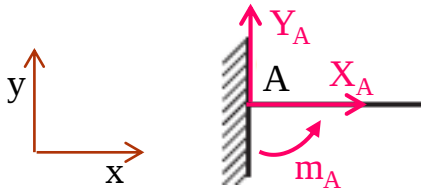
Contraintes et déformations dépendent des efforts de cohésion au centre de gravité G de la section droite S



$$(\sigma, \epsilon) = f\left(\left\{ \begin{matrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{matrix} \right\}\right)$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

NOM	DDL	EFFORTS TRANSMIS 3D	EFFORTS TRANSMIS 2D	SCHEMA
 Appui simple	5	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	
 Articulation	1	$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$	
 Encastrement	0	$\begin{Bmatrix} X_A & L_A \\ Y_A & M_A \\ Z_A & N_A \end{Bmatrix}_A$	$\begin{Bmatrix} X_A & 0 \\ Y_A & 0 \\ 0 & m_A \end{Bmatrix}_A$ Cas de flexion	

3. Principe fondamental de la statique

Énoncé du principe

Un solide indéformable E, sollicité par un système de forces extérieures, est en équilibre si et seulement si :

$$\{\bar{E} \rightarrow E\}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{M}_{F_{ext}/M} = \vec{0} \end{cases}$$

Equations d'équilibre

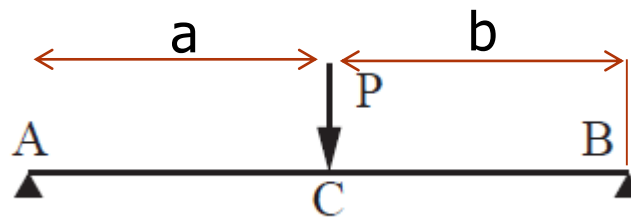
	Système 3D (Oxyz)	Système 2D (Oxy)
$R=0$	$\Sigma \text{ proj. sur Ox des } F_{ext}=0$	$S \text{ proj. sur Ox des } F_{ext}=0$
	$\Sigma \text{ proj. sur Oy des } F_{ext}=0$	$S \text{ proj. sur Oy des } F_{ext}=0$
	$\Sigma \text{ proj. sur Oz des } F_{ext}=0$	
$M_{R/M}=0$	$\Sigma \text{ moments/ Ox des } F_{ext}=0$	
	$\Sigma \text{ moments/ Oy des } F_{ext}=0$	
	$\Sigma \text{ moments/ Oz des } F_{ext}=0$	$S \text{ moments/ Oz des } F_{ext}=0$

Soit une poutre de section constante, reposant sur deux appuis simples sans adhérence en A et B et encaissant une charge P en C.

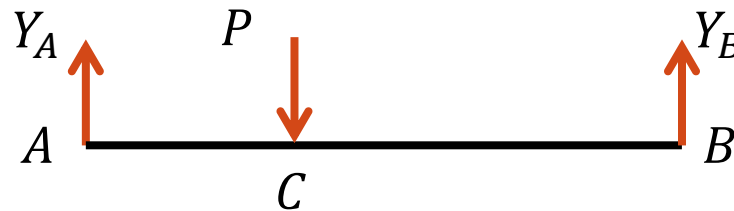
Déterminer en fonction de P, a et b, les actions en A et B

Cas 1 : $a \neq b$,

Cas 2 : $a = b$,

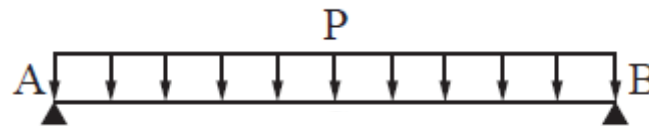


Modèle :

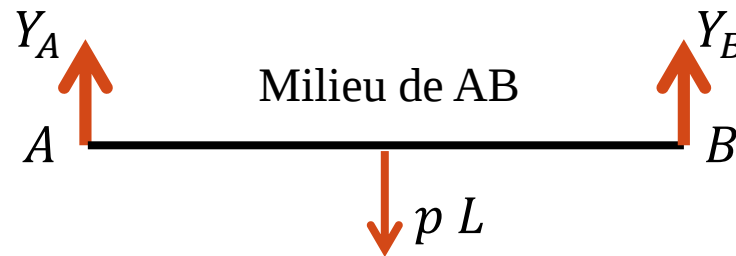


Soit une poutre de section constante, de longueur L , reposant sur deux appuis simples sans adhérence en A et B et encaissant une charge uniformément répartie entre A et B de densité linéique p (N/mm)

Déterminer en fonction de p et L , les actions en A et B



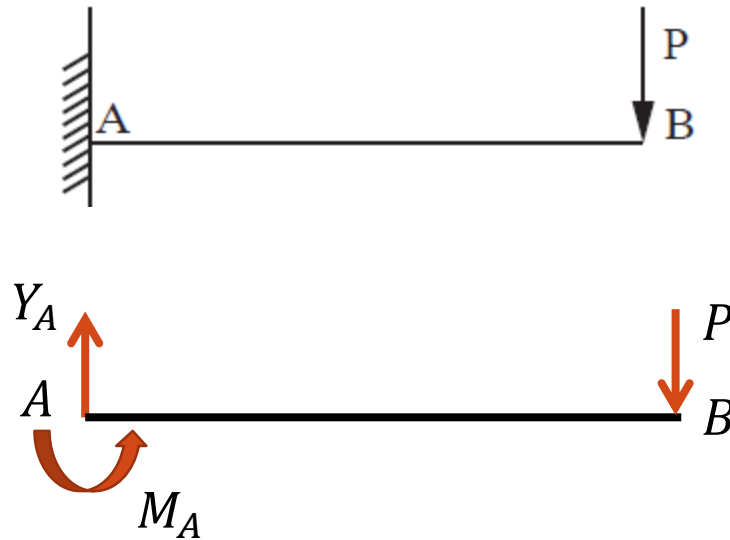
Modèle :



Soit une poutre de section constante, de longueur L , encastrée en A et encaissant une charge P en B.

Déterminer en fonction de P et L , les actions en A

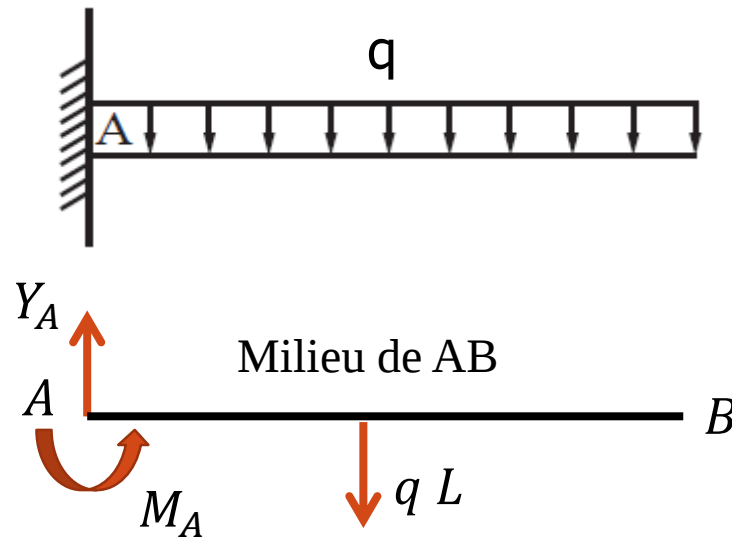
Modèle :



Soit une poutre de section constante, de longueur L , encastrée en A et encaissant une charge uniformément répartie de densité linéique q (N/mm)

Déterminer en fonction de q et L , les actions en A

Modèle :



Plan du cours

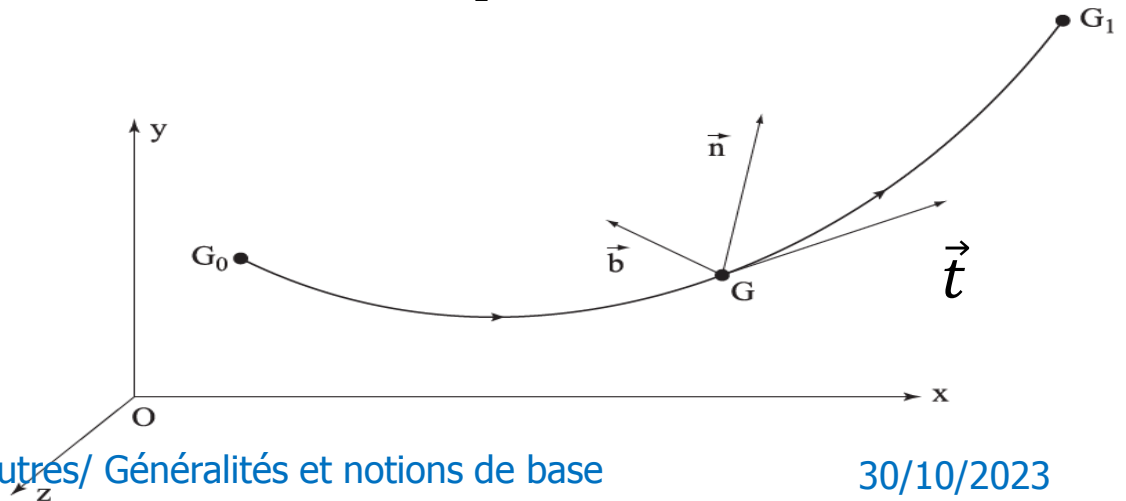
1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

4. Repère de Frenet

Définissons un repère orthonormé d'origine G , lié à la ligne moyenne G_0G_1

Le repère orthonormé direct $\{G, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b}\}$ est le repère de Frenet de la courbe G_0G_1 au point G .

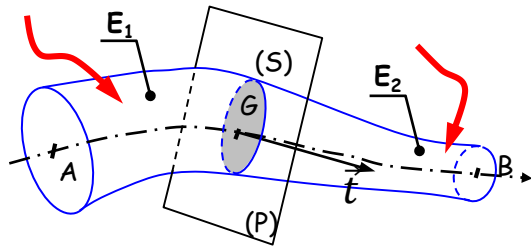
- $\vec{t}$ **premier vecteur** de la base : unitaire, tangent à la courbe G_0G_1 en G et orienté dans le sens des abscisses curvilignes croissantes : $\vec{t} = \frac{d\vec{OG}}{ds}$
- $\vec{n}$ **second vecteur** de la base : unitaire, normal à $\vec{t}$, dirigé vers le centre de courbure, nommé vecteur normal principal,.
- $\vec{b}$ ou $(\vec{z})$ **troisième vecteur** de la base défini par : $\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$, se nomme binormal.



Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

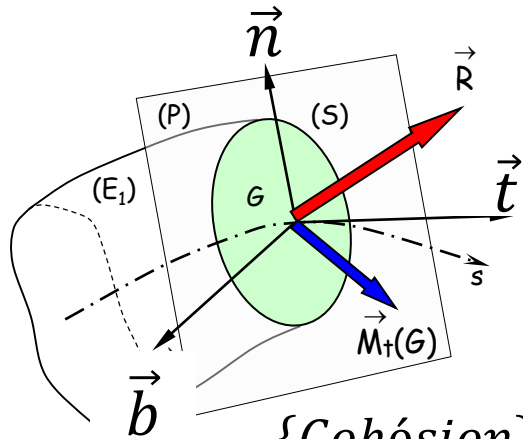
5. Torseur de cohésion ou des efforts intérieurs



Coupons la poutre (E) par un plan (P) orthogonal à sa ligne moyenne, situé à l'abscisse s.
On définit ainsi deux portions de poutre (E1) et (E2).

Le torseur $\{E_2 \rightarrow E_1\}$ est le **torseur de cohésion** ou **torseur des efforts intérieurs**.

Les efforts intérieurs permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures. On vise en particulier à vérifier qu'en aucun point de la poutre, les efforts de cohésion ne soient supérieurs aux capacités du matériau.



En coordonnées cartésiennes :

$$\{Cohésion\} = \begin{cases} \vec{R}(s) = N\vec{t} + T_n\vec{n} + T_b\vec{b} \\ \vec{M}_G(s) = M_t\vec{t} + M_{f_n}\vec{n} + M_{f_b}\vec{b} \end{cases} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_n & M_{f_n} \\ T_b & M_{f_b} \end{Bmatrix}_{(G, \vec{t}, \vec{n}, \vec{b})}$$

$$\{Cohésion\} = \begin{cases} \vec{R}(x) = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} \\ \vec{M}_G(x) = M_t\vec{x} + M_{f_y}\vec{y} + M_{f_z}\vec{z} \end{cases} = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{f_y} \\ T_z & M_{f_z} \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

5. Torseur des efforts intérieurs

- Lorsque l'on a une seule de ces sollicitations, on parle de sollicitation simple :

Traction- compression : $N \neq 0$

Cisaillement : $T_y \neq 0$ ou $T_z \neq 0$

Torsion : $M_t \neq 0$

Flexion pure : $M_{f2} \neq 0$ ou $M_{f3} \neq 0$

Flexion simple : $(T_y \neq 0, M_{fz} \neq 0)$ ou $(T_z \neq 0, M_{fy} \neq 0)$

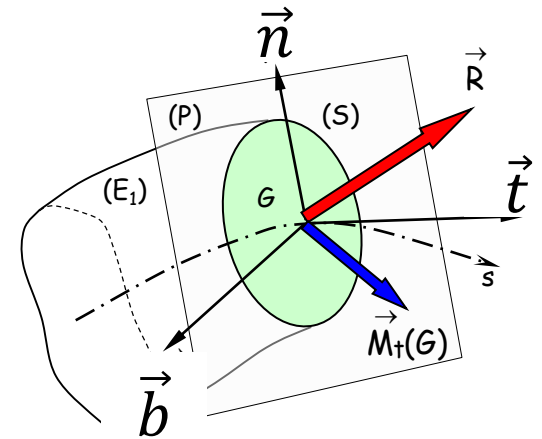
- Sinon, on parle de sollicitation composée :

Flexion composée : $(N \neq 0, T_y \neq 0, M_{fz} \neq 0)$ ou $(N \neq 0, T_z \neq 0, M_{fy} \neq 0)$

Flexion déviée : $(T_y \neq 0, M_{fz} \neq 0)$ et $(T_z \neq 0, M_{fy} \neq 0)$.

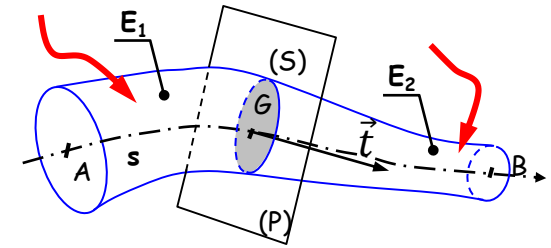
Flexion composée déviée : $N \neq 0$ et $(T_y \neq 0, M_{fz} \neq 0)$ et $(T_z \neq 0, M_{fy} \neq 0)$

Flexion – torsion : $(M_t \neq 0, T_y \neq 0, M_{fz} \neq 0)$ ou $(M_t \neq 0, T_z \neq 0$ et $M_{fy} \neq 0)$



Coupons la poutre (E) par un plan (P) orthogonal à sa ligne moyenne, situé à l'abscisse s.

On définit ainsi deux portions de poutre : (E1) et (E2).



(E) étant en équilibre, on peut écrire :

$$\{\bar{E} \rightarrow E\} = \{0\}$$

(E1) étant en équilibre, on peut écrire :

$$\{\bar{E} \rightarrow E1\} + \{E2 \rightarrow E1\} = \{0\}$$

(E2) étant en équilibre, on peut écrire :

$$\{\bar{E} \rightarrow E2\} + \{E1 \rightarrow E2\} = \{0\}$$

On en déduit :

$$\{Cohésion\} = \{E2 \rightarrow E1\} = -\{\bar{E} \rightarrow E1\} = \{\bar{E} \rightarrow E2\}$$



Le torseur de cohésion est égal à (-) le torseur des efforts extérieurs appliqués à gauche de la section de coupure.

Convention adoptée dans ce cours

Une poutre 1 est en liaison pivot d'axe (A,z) et en contact ponctuel de normale (D,y) avec un solide 0

Des actions mécaniques extérieures exercées sur 1 sont représentées par deux torseurs en B et C:

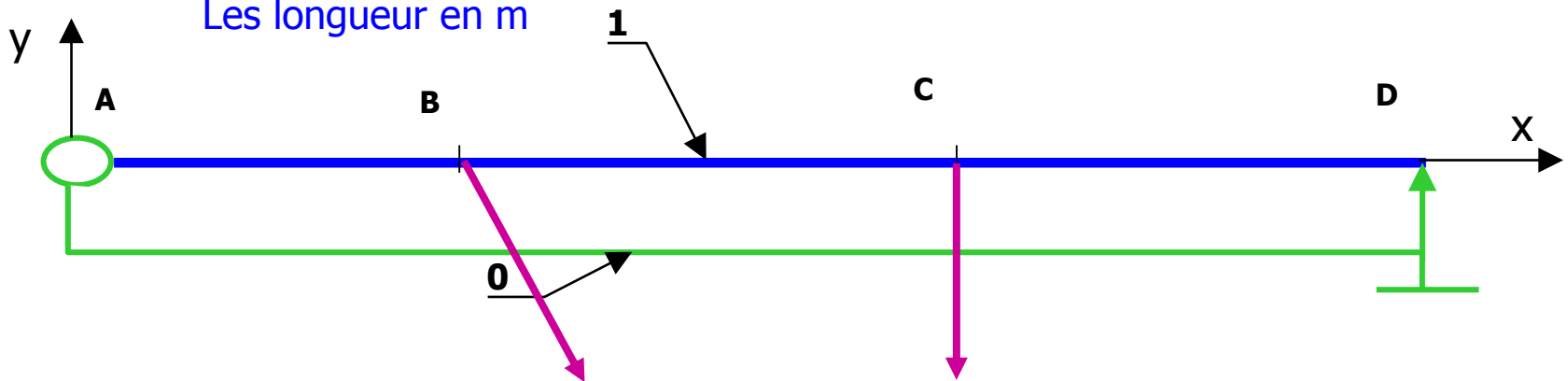
$$\{T_{1ext \rightarrow 1}\}_B = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

$$\{T_{2ext \rightarrow 1}\}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$$

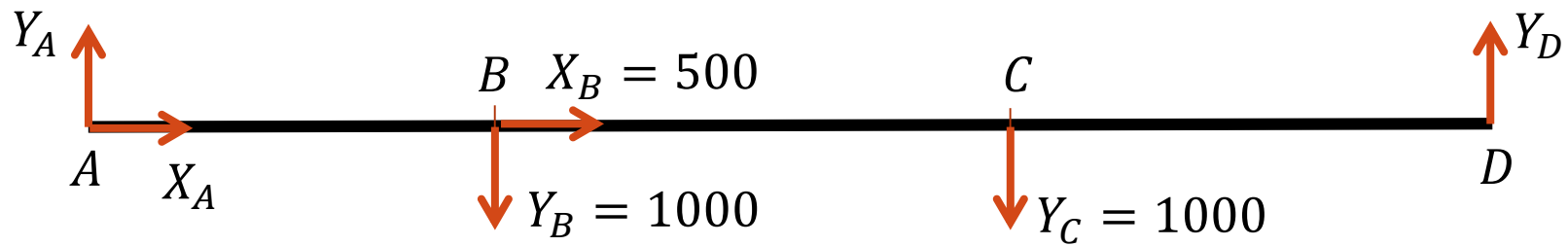
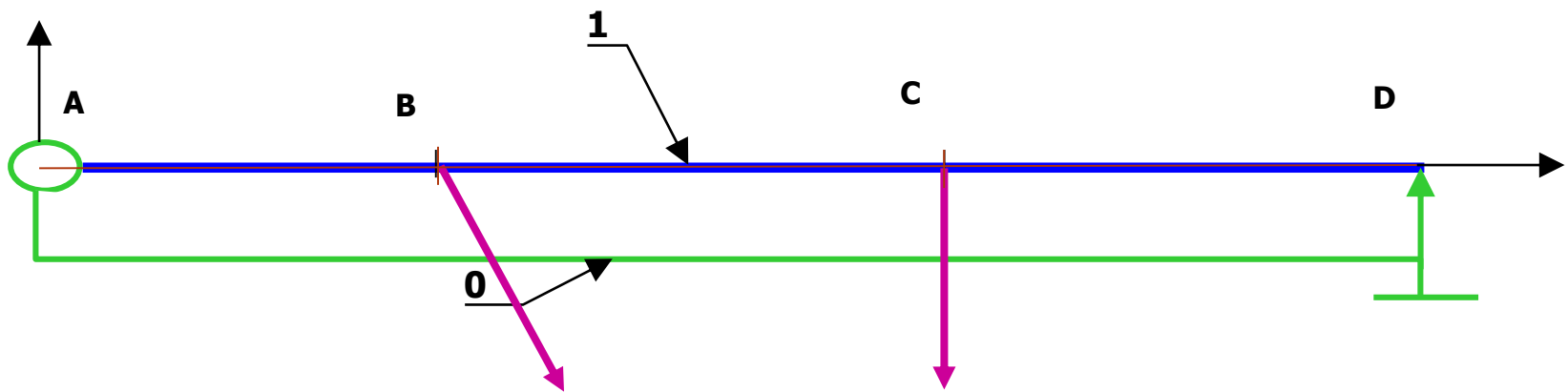
on donne:

Les longueurs en m

A(0,0,0) B(1,0,0) C(2,0,0) D(3,0,0)



- Déterminer les inconnues des torseurs des liaisons en A et D
- Écrire le torseur de cohésion le long de la poutre $\{T_{S+/S-}\}$
- Tracer les diagrammes $N(x)$, $T(x)$ et $M_fz(x)$



A. Déterminer les inconnues des torseurs des liaisons en A et D

Si on isole la poutre 1 : elle est soumise à 4 actions mécaniques extérieures

REPONSE

$$\{T_{1ext \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 500 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_B \quad \{T_{2ext \rightarrow 1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C \quad \{T_{A0/1}\} = \begin{Bmatrix} X_{A0/1} & 0 \\ Y_{A0/1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A \quad \{T_{D0/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{D0/1} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_D$$

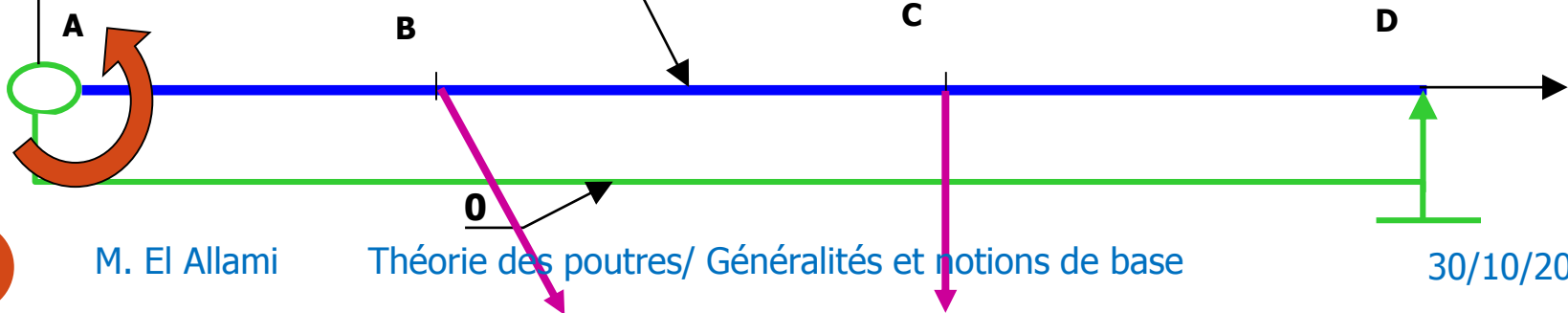
Si on applique le P.F.S en A on obtient:

$${}_A\{T_{1ext \rightarrow 1}\} + {}_A\{T_{2ext \rightarrow 1}\} + {}_A\{T_{A0/1}\} + {}_A\{T_{D0/1}\} = \{0\}$$

On obtient les équations suivantes:

$$\Sigma \vec{R}_{1 \rightarrow 1} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} 500 + X_{A0/1} = 0 \\ -2000 + Y_{A0/1} + Y_{D0/1} = 0 \end{cases} \Rightarrow X_{A0/1} = -500N \Rightarrow Y_{A0/1} = 1000N$$

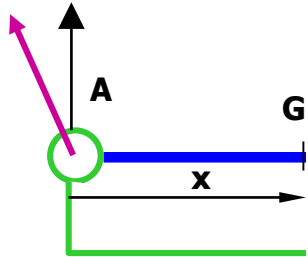
$$\Sigma \vec{M}_{A(1 \rightarrow 1)} = \vec{0} \Rightarrow -(1000 \times 1) - (1000 \times 2) + (Y_{D0/1} \times 3) = 0 \Rightarrow Y_{D0/1} = 1000N$$



B. Écrire le torseur de cohésion le long de la poutre $\{T_{S+/S-}\}$

Si on effectue une coupure entre [AB] : avec $G(x,0,0)$ et $x \in [0,1]$

Si on étudie l'équilibre de S- on obtient:

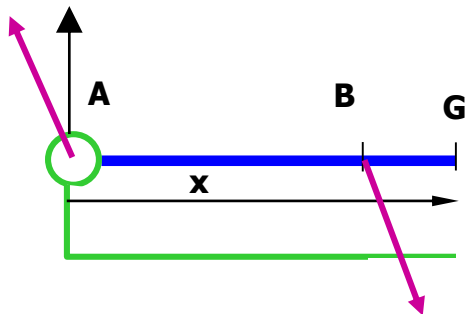


$$\begin{aligned} N &= +500 \text{ N} \\ T_y &= -1000 \text{ N} \\ T_z &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fy} &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fz} &= 1000.x \text{ (N.m)} \end{aligned}$$

Si on effectue une coupure entre [AC] : avec $G(x,0,0)$ et $x \in [1,2]$

Si on étudie l'équilibre de S- on obtient:

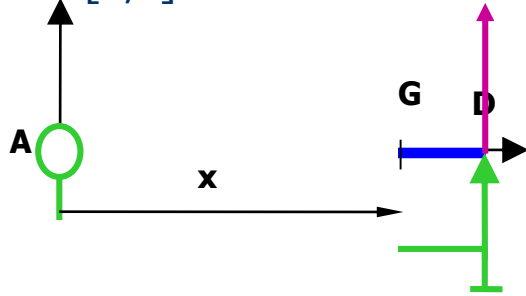


$$\begin{aligned} N &= 0 \text{ N} \\ T_y &= 0 \text{ N} \\ T_z &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fy} &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fz} &= 1000 \text{ (N.m)} \end{aligned}$$

REPONSE

Si on effectue une coupure entre [AD] : avec $G(x,0,0)$ et $x \in [2,3]$

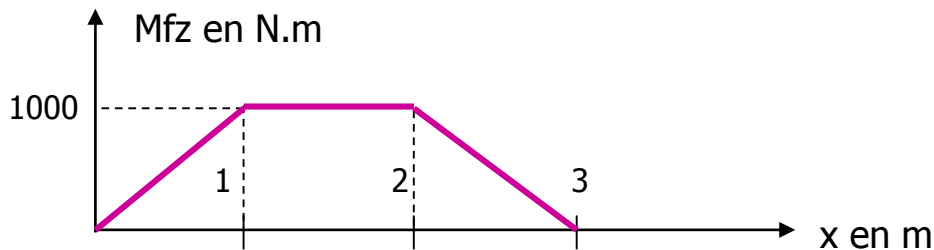
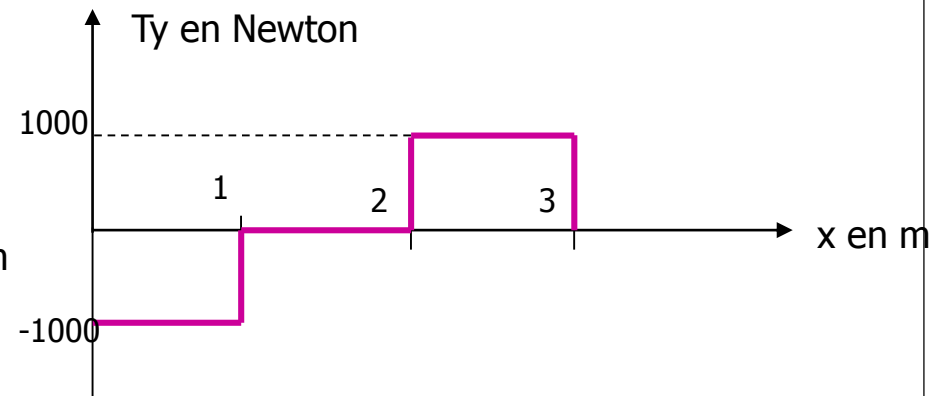
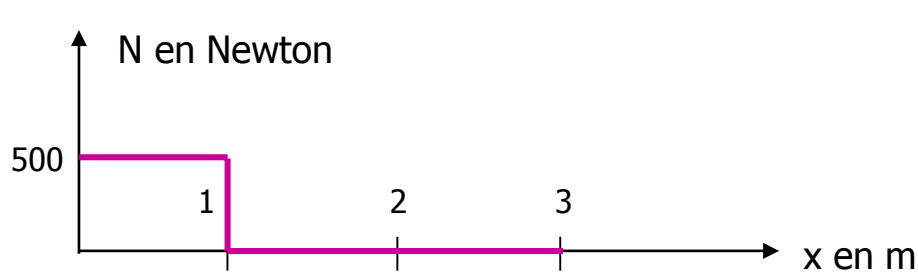


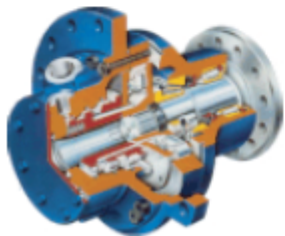
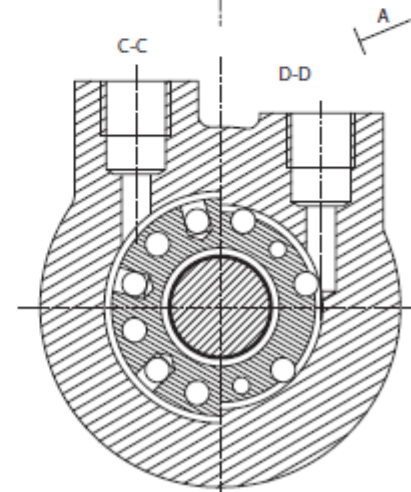
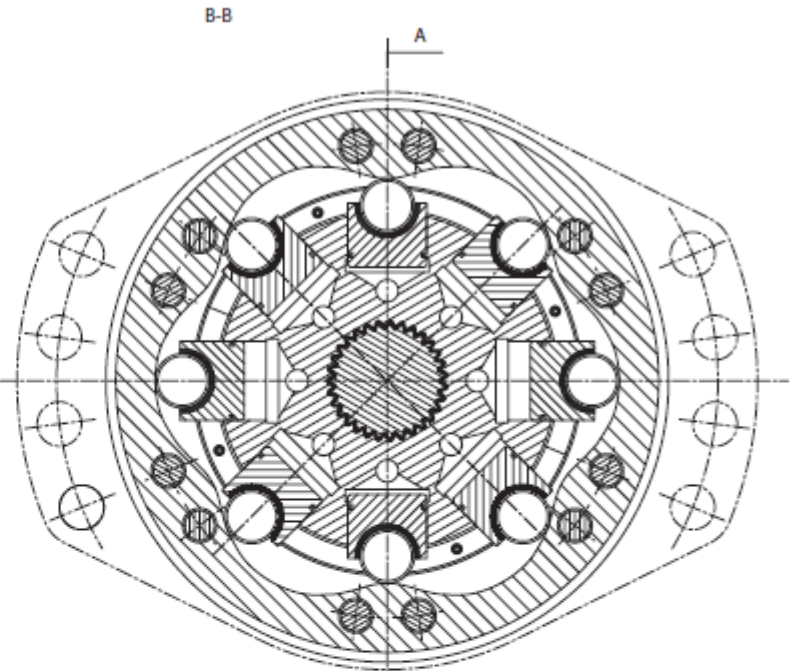
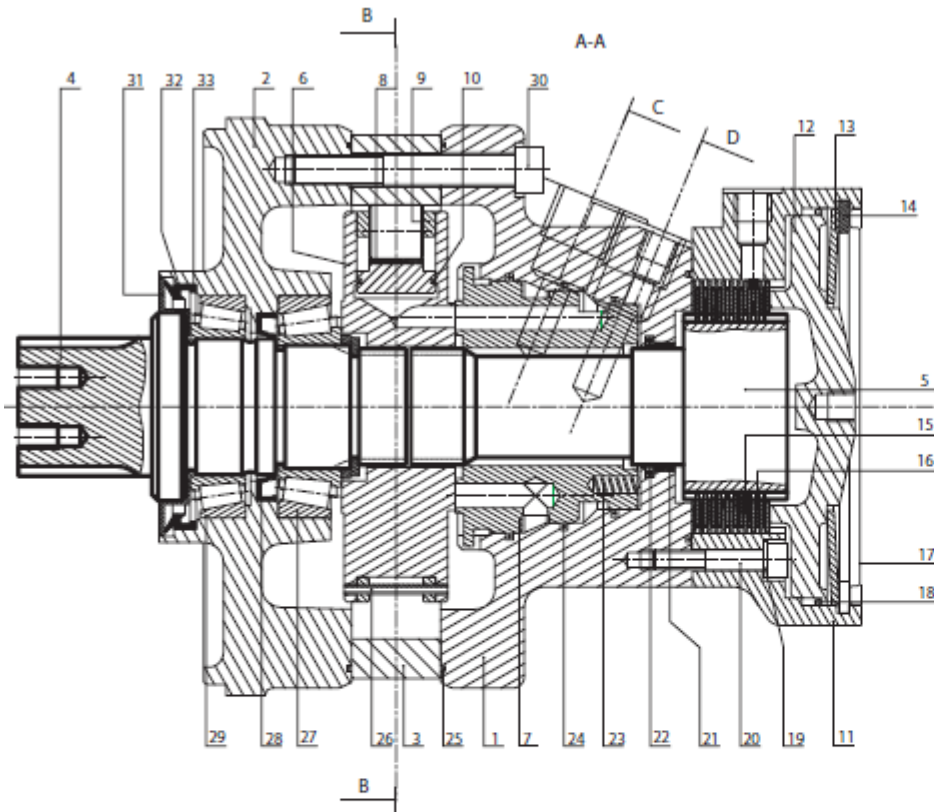
$$\begin{aligned} N &= 0 \text{ N} \\ T_y &= 1000 \text{ N} \\ T_z &= 0 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fy} &= 0 \text{ N.m} \\ M_{fz} &= 1000 \cdot (3-x) \text{ (N.m)} \end{aligned}$$

REPONSE

C. Tracer les diagrammes $N(x)$, $T(x)$ et $M_{fz}(x)$





Moteur hydraulique Poclain



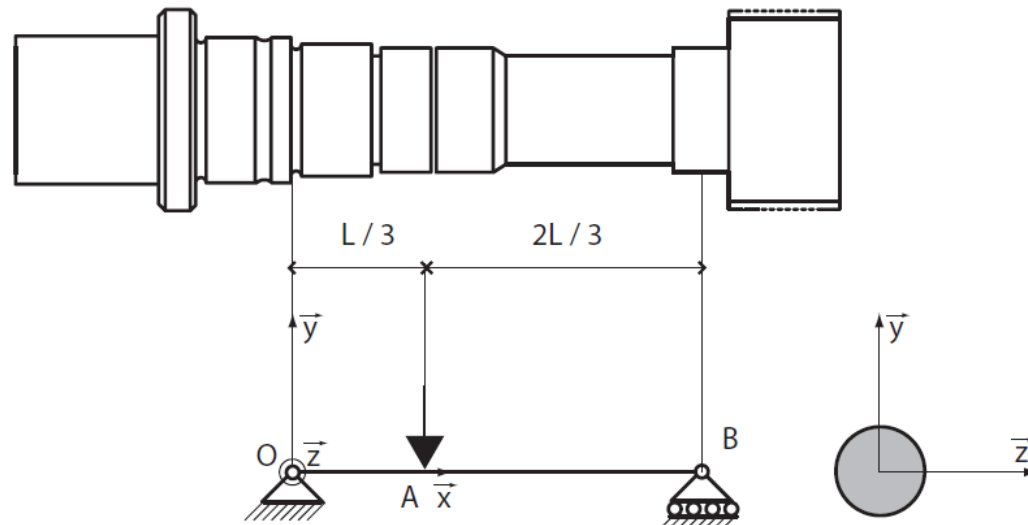
Modélisation de l'arbre

le bilan des
actions
mécaniques
extérieures :

– En O :

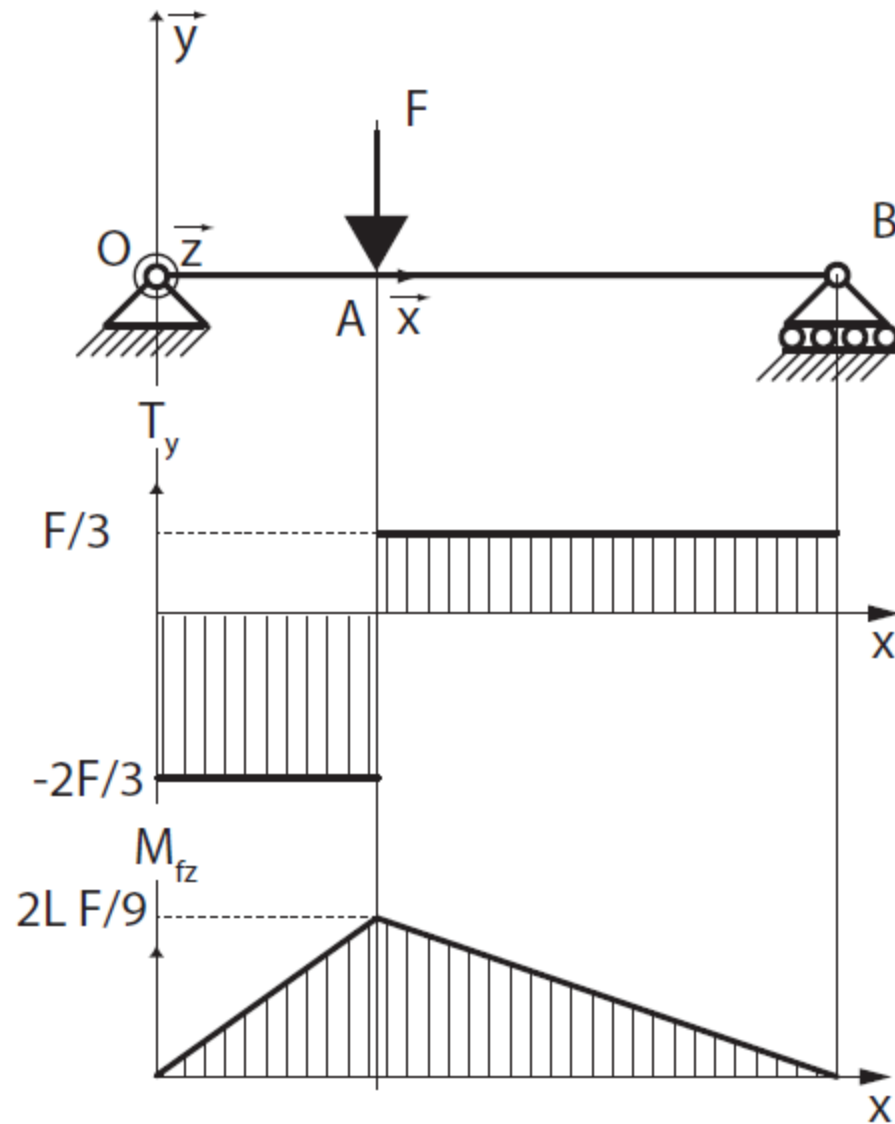
– En A :

– En B :



- Déterminer les inconnues des torseurs des liaisons en O et B
- Écrire le torseur de cohésion le long de la poutre $\{T_{S+/S-}\}$
- Tracer les diagrammes $N(x)$, $T(x)$ et $M_fz(x)$

REPONSE



Grue de potence

La volée AB est encastree en B sur le poteau BC. Le poteau BC est encastree en C sur un support rigide. Une charge P, verticale, est suspendue en A.

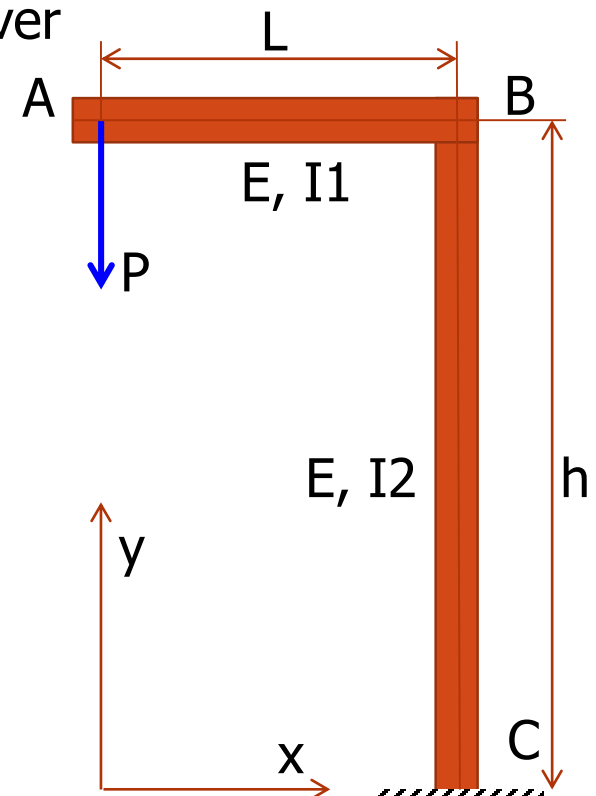
1. Déterminer les actions aux liaisons en C,
2. Déterminer le torseur de cohésion puis retrouver les actions aux liaisons,
3. Tracer les diagrammes de N, T et Mf

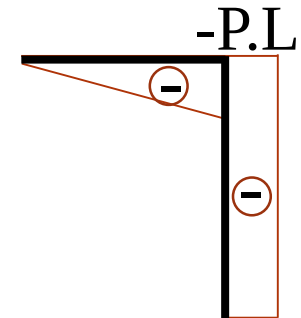
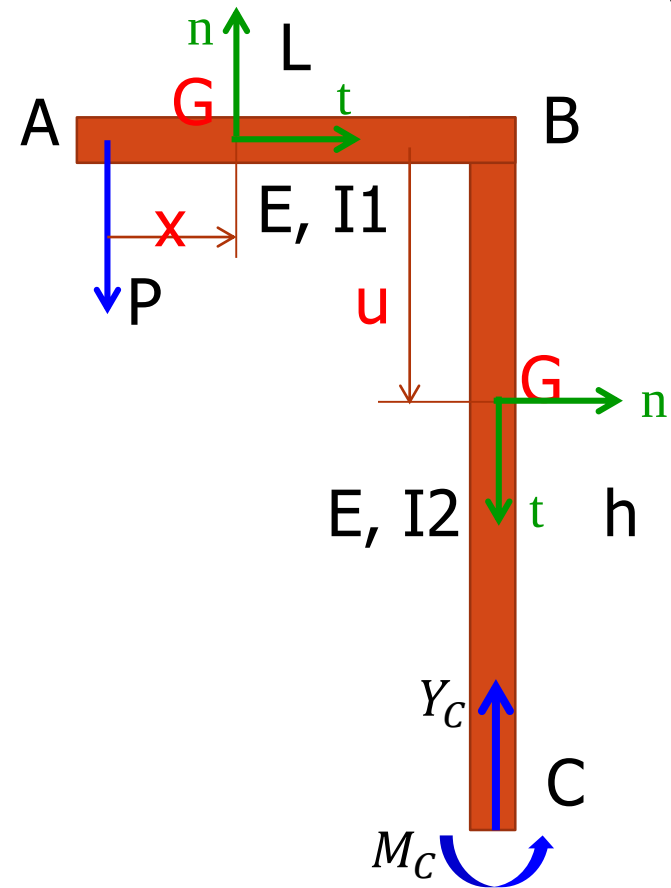
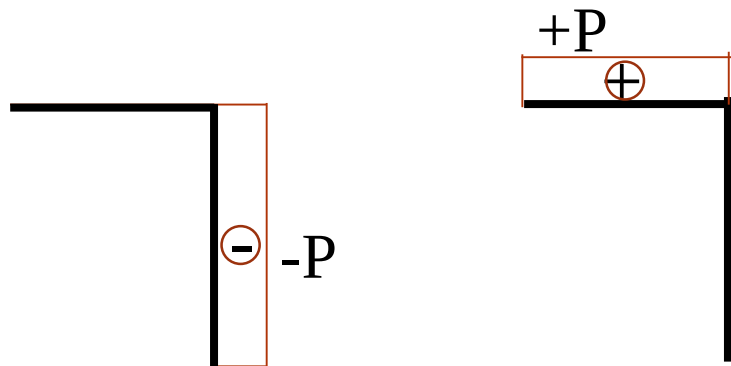
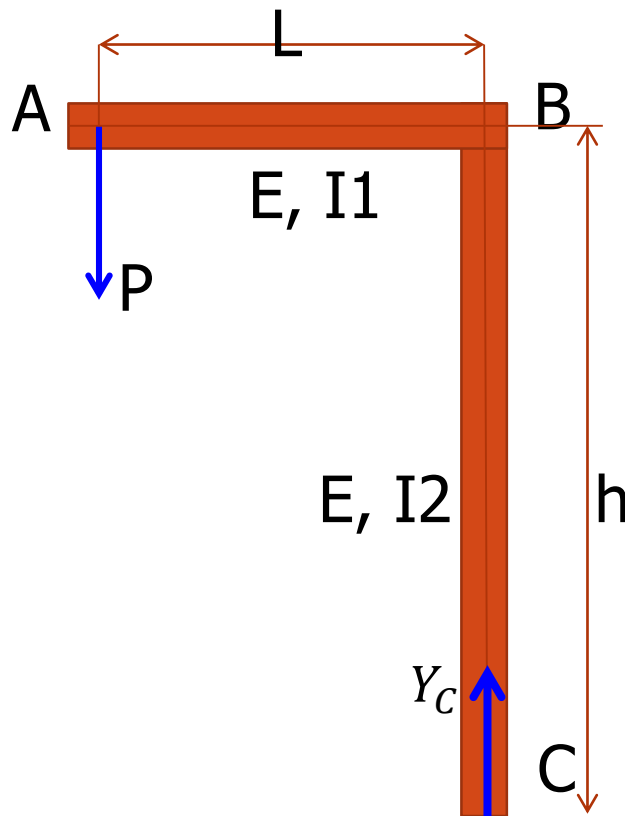
REPONSE

$$\text{ZONE AB} \quad \{\tau_{c1}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s) = P\vec{y} = P\vec{n} \\ \vec{m}_G(s) = \vec{GA} \wedge P\vec{y} = -Px\vec{z} \end{array} \right\}$$

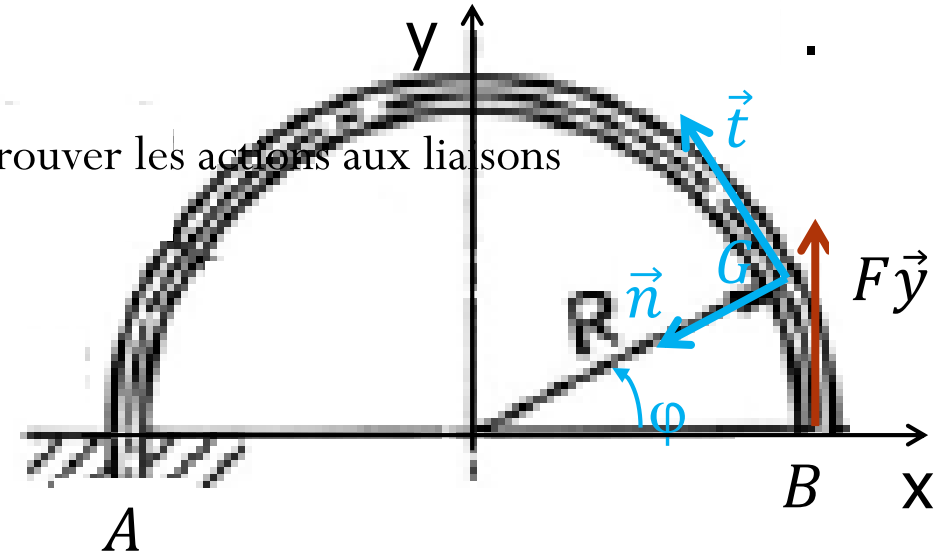
$$\text{ZONE BC} \quad \{\tau_{c2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s) = P\vec{y} = -P\vec{t} \\ \vec{m}_G(s) = \vec{GA} \wedge P\vec{y} = -PL\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_C = +\{\tau_c\}_C = \left\{ \begin{array}{l} P\vec{y} \\ -PL\vec{z} \end{array} \right\}$$





1. Déterminer les actions aux liaisons en A,
2. Déterminer le torseur de cohésion puis retrouver les actions aux liaisons en A,



REP:

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s) = -F\vec{y} \\ \vec{m}(s) = -\vec{GB} \wedge F\vec{y} = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}(s) = -F\cos\varphi \vec{t} + F\sin\varphi \vec{n} \\ \vec{m}(s) = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

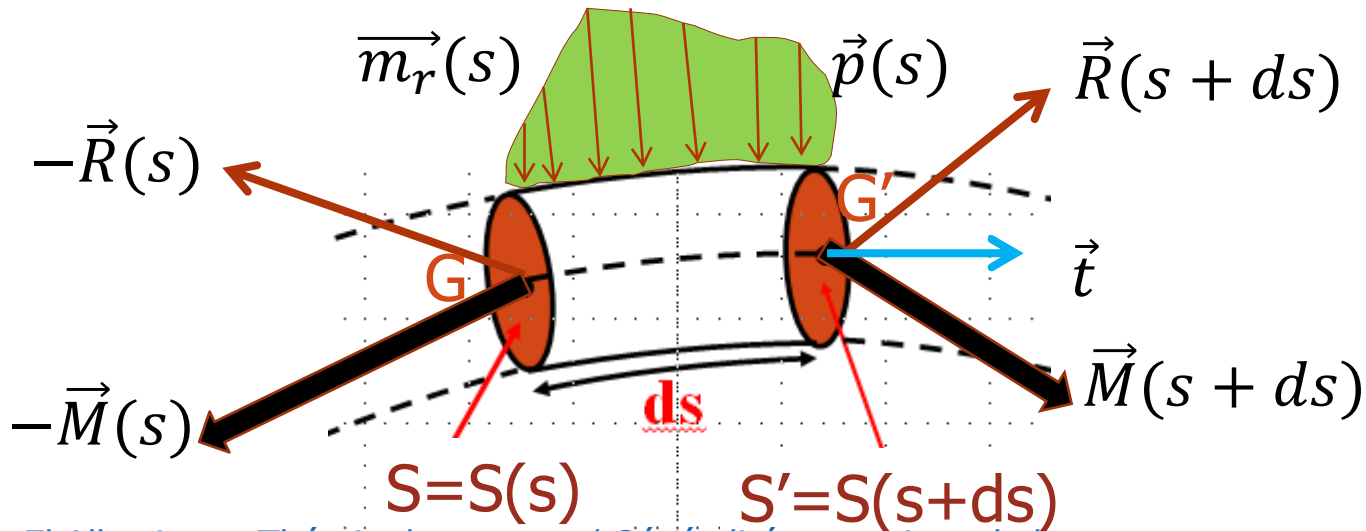
$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = +\{\tau_c\}_{A(\varphi=\pi-)} = \left\{ \begin{array}{l} -F\vec{y} \\ -2FR\vec{z} \end{array} \right\}$$

Considérons une tranche élémentaire de poutre, comprise entre les sections droites voisines : S : d'abscisses curvilignes s et de centres G et S' d'abscisses curvilignes $s+ds$ et de centres G' .

Supposons que les forces et couples extérieurs appliqués au niveau de cette tranche soient tous répartis $\vec{p}(s).ds$ et $\vec{m}_r(s).ds$.

L'ensemble des actions exercées par la poutre à gauche du tronçon est représentée en G par :

L'ensemble des actions exercées par la poutre à droite du tronçon est représentée en G' par :



Étudions l'équilibre du tronçon en négligeant les termes de deuxième ordre (ds^2) :

Équation de la résultante :

$$\frac{d\vec{R}(s)}{ds} + \vec{p}(s) = \vec{0}$$

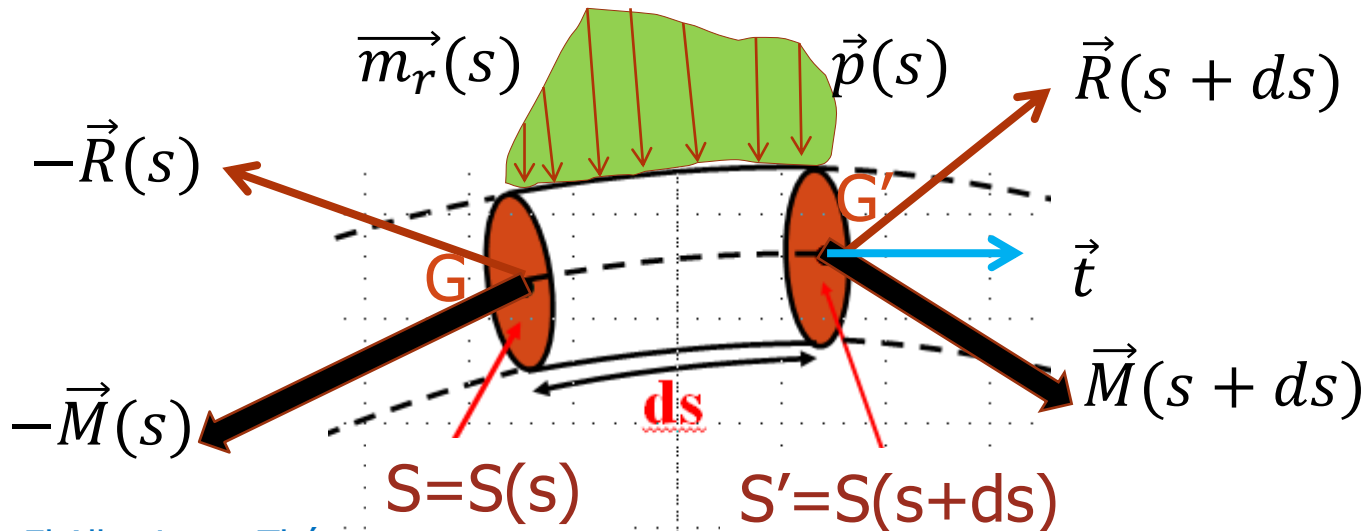
Équation du moment en G' :

$$\frac{d\vec{M}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{R}(s) + \vec{m}_r(s) = \vec{0}$$

Ce sont les deux équations de l'équilibre local

Si : $\vec{p}(s) = p \vec{n}$ $\vec{m}_r(s) = \vec{0}$

$$\frac{dN(s)}{ds} = 0 \quad \frac{dT(s)}{ds} = -p(s) \quad \frac{dM(s)}{ds} = -T(s)$$





Déterminer le torseur de cohésion et les actions aux liaisons en utilisant les deux méthodes :

1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,

REP:

$$\overrightarrow{R(x)} = -F\vec{y}$$

$$\overrightarrow{m(x)} = F(x - l)\vec{z}$$

$$\overrightarrow{Y_A} = F\vec{y}, \overrightarrow{m_A} = Fl\vec{z}$$

Déterminer le torseur de cohésion et les actions aux liaisons en utilisant les deux méthodes :

1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,

REP:

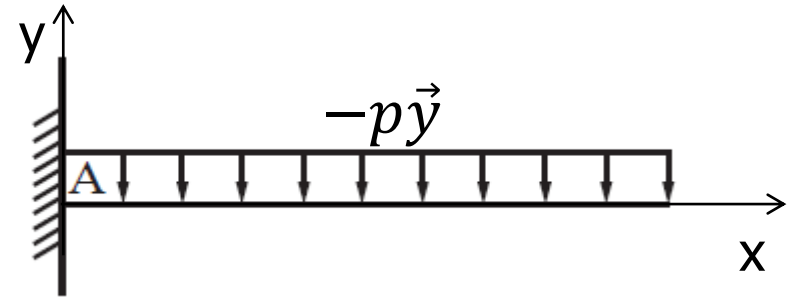
$$\{\tau_c\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R(x)} \\ \overrightarrow{m(x)} \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R(x)} = p(x - l)\vec{y}$$

$$\overrightarrow{m(x)} = -p \frac{(x - l)^2}{2} \vec{z}$$

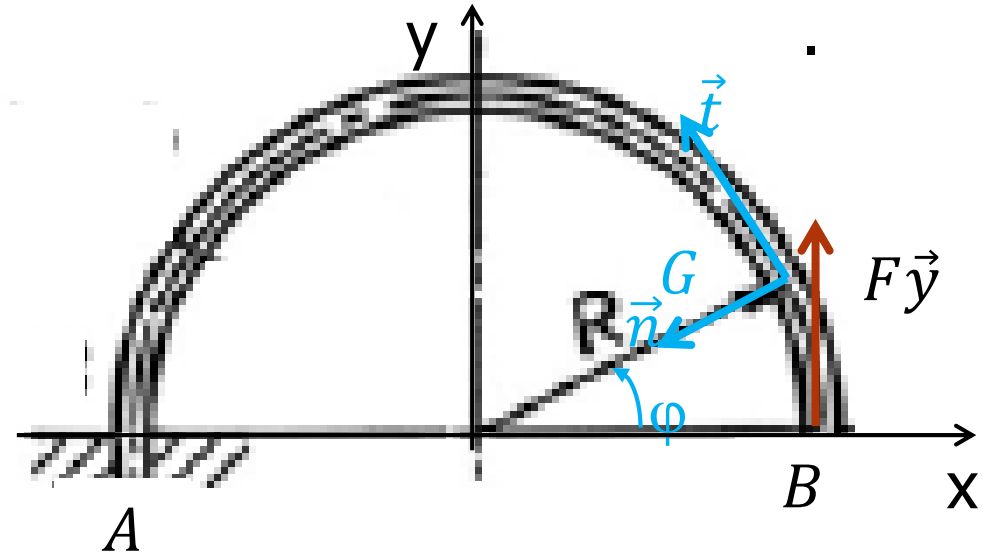
$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = -\{\tau_c\}_{A(x=0+)} = \begin{Bmatrix} pl\vec{y} \\ p \frac{l^2}{2} \vec{z} \end{Bmatrix}$$

$$\text{D'où : } \vec{Y}_A = pl\vec{y}, \quad \vec{m}_A = p \frac{l^2}{2} \vec{z}$$



Déterminer le torseur de cohésion et les actions aux liaisons en utilisant les deux méthodes :

1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,



REP:

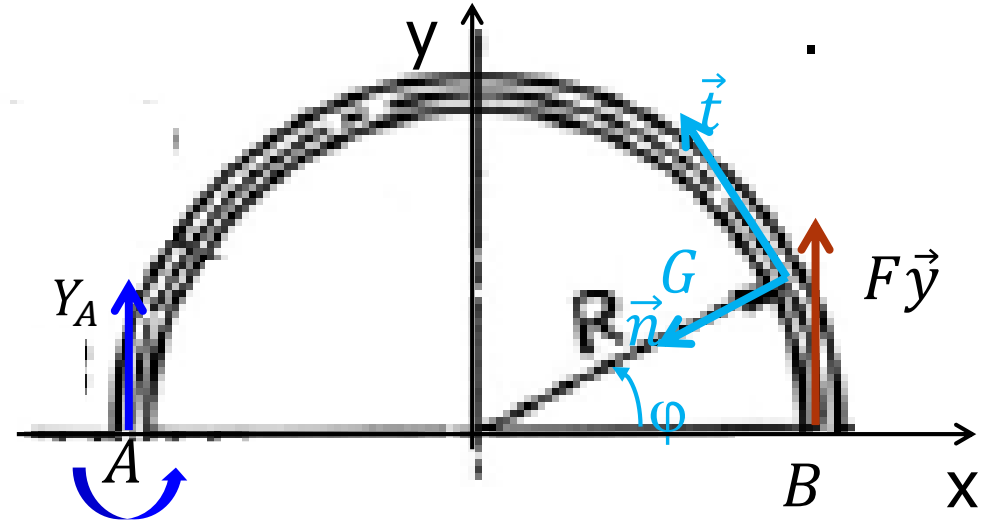
$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\vec{y} \\ \overrightarrow{m(s)} = -\overrightarrow{GB} \wedge F\vec{y} = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\cos\varphi \vec{t} + F\sin\varphi \vec{n} \\ \overrightarrow{m(s)} = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = +\{\tau_c\}_{A(\varphi=\pi-)} = \left\{ \begin{array}{l} -F\vec{y} \\ -2FR\vec{z} \end{array} \right\}$$

Déterminer le torseur de cohésion et les actions aux liaisons en utilisant les deux méthodes :

1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,



REP:

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\vec{y} \\ \overrightarrow{m(s)} = -\overrightarrow{GB} \wedge F\vec{y} = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\cos\varphi \vec{t} + F\sin\varphi \vec{n} \\ \overrightarrow{m(s)} = -FR(1 - \cos\varphi)\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = +\{\tau_c\}_{A(\varphi=\pi-)} = \left\{ \begin{array}{l} -F\vec{y} \\ -2FR\vec{z} \end{array} \right\}$$

Déterminer le torseur de cohésion
et les actions aux liaisons
en utilisant les deux méthodes :

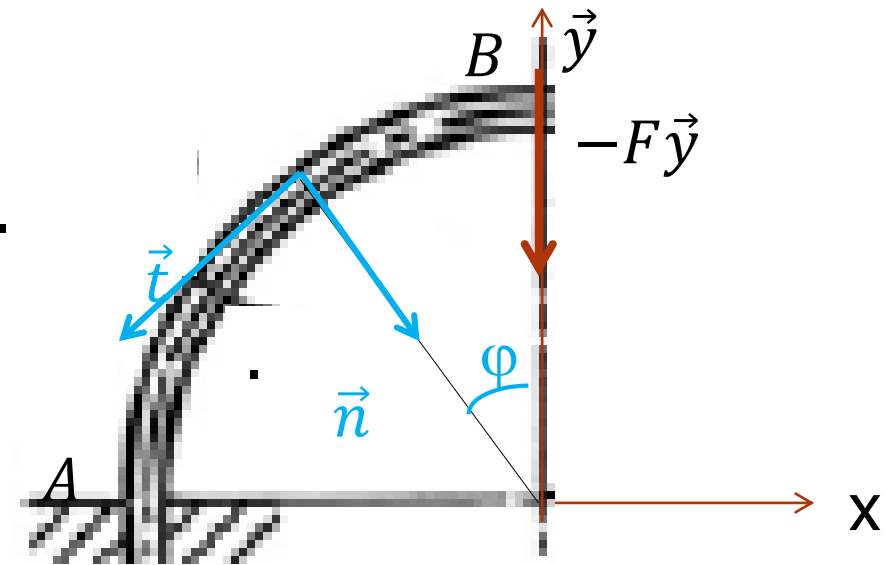
1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,

REP:

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = F\vec{y} \\ \overrightarrow{m(s)} = -\overrightarrow{GB} \wedge -F\vec{y} = FR\sin\varphi\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\sin\varphi\vec{t} - F\cos\varphi\vec{n} \\ \overrightarrow{m(s)} = FR\sin\varphi\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = +\{\tau_c\}_{A(\varphi=\pi/2-)} = \left\{ \begin{array}{l} F\vec{y} \\ FR\vec{z} \end{array} \right\}$$



Déterminer le torseur de cohésion
et les actions aux liaisons
en utilisant les deux méthodes :

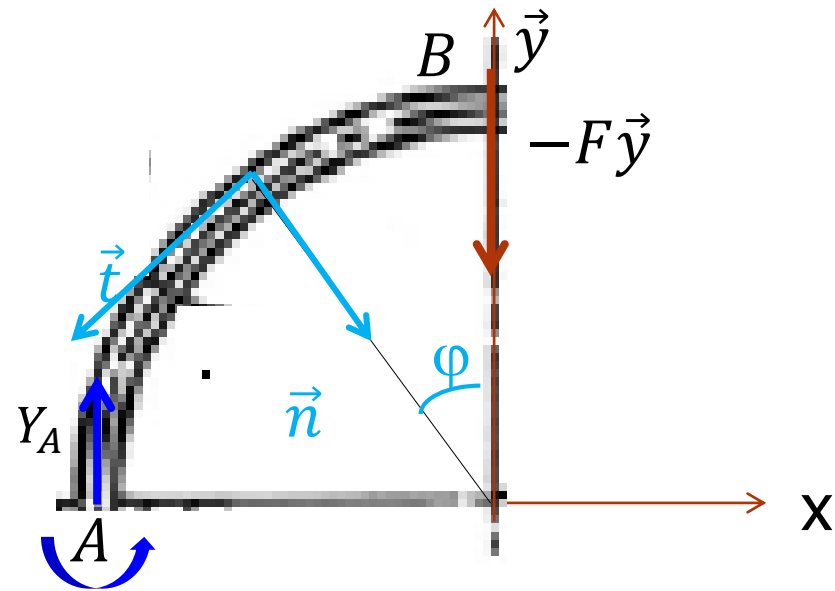
1. Les équations générales,
2. Les équations de l'équilibre local,

REP:

$$\{\tau_c\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = F\vec{y} \\ \overrightarrow{m(s)} = -\overrightarrow{GB} \wedge -F\vec{y} = FR\sin\varphi\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{R(s)} = -F\sin\varphi\vec{t} - F\cos\varphi\vec{n} \\ \overrightarrow{m(s)} = FR\sin\varphi\vec{z} \end{array} \right\}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = +\{\tau_c\}_{A(\varphi=\pi/2-)} = \left\{ \begin{array}{l} F\vec{y} \\ FR\vec{z} \end{array} \right\}$$



Déterminer le torseur de cohésion et les actions aux liaisons en utilisant les deux méthodes :

1. Les équations générales : par intégration et par calcul direct
2. Les équations de l'équilibre local,

$$\{\tau_c\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(x) \\ \vec{m}(x) \end{Bmatrix}$$

REP:

$$q(x) = ax + b = \frac{p}{L}x - p \quad \vec{q}(x) = -\frac{p}{L}(L-x)\vec{y}$$

1.a. Les équations générales,

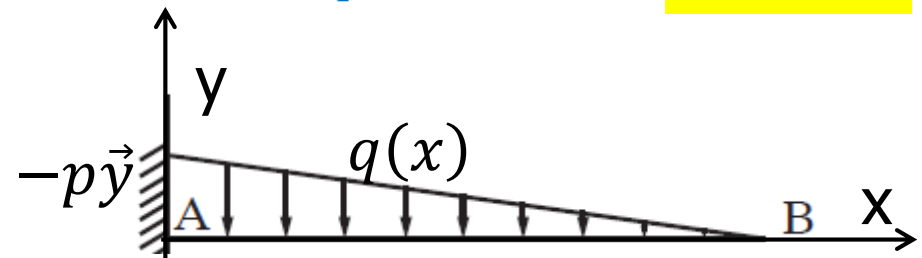
$$\vec{R}(x) = \vec{q}(x)(L-x)/2 = -\frac{p}{2L}(L-x)^2\vec{y}$$

$$\vec{m}(x) = \|\vec{R}(x)\|(L-x)/3 \cdot \vec{z} = -\frac{p}{6L}(L-x)^3\vec{z}$$

1.b. Les équations générales,

$$\vec{R}(x) = \int_x^L \vec{q}(u) du$$

$$\vec{m}(x) = \int_x^L \vec{q}(u) du \cdot (u-x)$$



2. Les équations de l'équilibre local,

$$\frac{d\vec{R}(x)}{dx} - \frac{p}{L}(L-x)\vec{y} = \vec{0}$$

$$\frac{d\vec{m}(x)}{dx} + \vec{x} \wedge \vec{R}(x) = \vec{0}$$

$$\{\bar{P} \rightarrow P\}_A = -\{\tau_c\}_{A(x=0+)} = \begin{Bmatrix} \frac{pL}{2}\vec{y} \\ \frac{pL^2}{6}\vec{z} \end{Bmatrix}$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

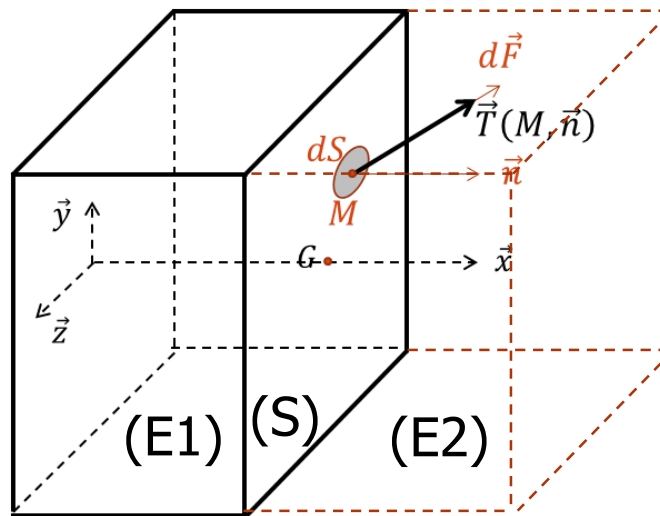
Vecteur contrainte en un point M

- Effectuons une **coupure** d'un solide, par une surface S , en deux parties $E1$ et $E2$.
- La partie $E1$ est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure.
- Considérons un point M de S , dS un élément de la surface infiniment petit entourant le point M et $\vec{n}$ le vecteur unitaire, normal en M à S et dirigé vers l'extérieur de $E1$.

Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur la **facette** dS en M .

On appelle vecteur contrainte sur la facette dS en M , la quantité :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$$



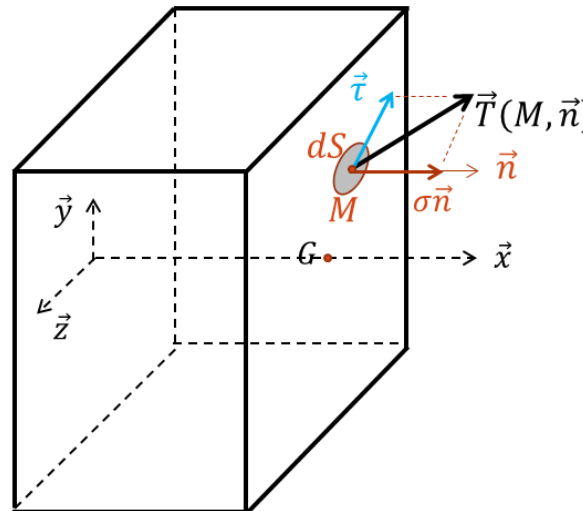
Le vecteur contrainte peut être décomposé en :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

- Contrainte normale σ : c'est la projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur la normale $\vec{n}$ de la facette.
Si σ est positive, on a localement un état de traction, sinon c'est un état de compression.
- Contrainte tangentielle τ , appelée aussi contrainte de cisaillement ou cession: c'est la projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur le plan de la facette.

Avec :

$$\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\vec{\tau}\|^2$$



$$\sigma = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\|\vec{\tau}\|^2 = \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \sigma^2$$

Considérons le cube infiniment petit d'un solide, centré sur le point M, construit sur les axes x, y et z .

Sur la facette $\vec{l}$: $\vec{T}(M, \vec{l}) = \sigma_{xx}\vec{l} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$

Sur la facette $\vec{j}$: $\vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{xy}\vec{l} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k}$

Sur la facette $\vec{k}$: $\vec{T}(M, \vec{k}) = \sigma_{xz}\vec{l} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$

Soit le tenseur $\bar{\sigma}(M)$ dont les colonnes sont les contraintes sur les trois facettes $(\vec{l}, \vec{j}, \vec{k})$ du repère $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \vec{T}(M, \vec{l}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

$\bar{\sigma}(M)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy.

Les termes diagonaux σ_{ij} : contraintes normales

Les termes non diagonaux τ_{ij} contraintes tangentiels.

les contraintes en un point sur les facettes $\vec{l}, \vec{j}, \vec{k}$ sont :

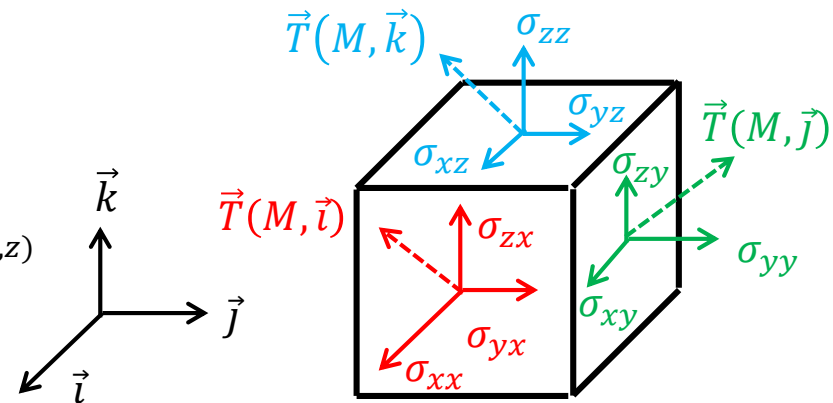
$$\vec{T}(M, \vec{l}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{l}$$

$$\vec{T}(M, \vec{j}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{j}$$

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{k}$$

Pour une facette $\vec{n}$ quelconque

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\sigma}(M) \cdot \vec{n}$$



Soit en notation indicielle :

$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

7. Équations d'élasticité

- Les contraintes doivent vérifier les équations d'équilibre :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i$$

- L'état de contraintes dans le solide provoque un état de déformation. $\bar{\bar{\epsilon}}(M) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$
Pour tout point M, le tenseur de déformations s'écrit :

- Les déformations sont obtenues en dérivant les déplacements :

$$2\epsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}$$

- Le vecteur rotation s'écrit :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot} \vec{u}}$$

- Les déformations sont obtenues aussi en utilisant les lois de comportement:

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} \quad \text{ou} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij}$$

λ et μ sont les coefficients de **Lamé**

E et ν sont les coefficients de **Hooke**
ou de **Young**.

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$	$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$
$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$

- Equations de Navier :

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} (\vec{u})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} (\vec{u}) + (\vec{f} - \rho \vec{\gamma}) = \vec{0}$$

- Equations de Beltrami (Cas de forces de volumes constantes) :

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,ij}}{1+\nu} = 0$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

8. Relations entre efforts intérieurs et contraintes

Prenons une poutre dont l'état de contraintes est défini en un point M de la section S par :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_z & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

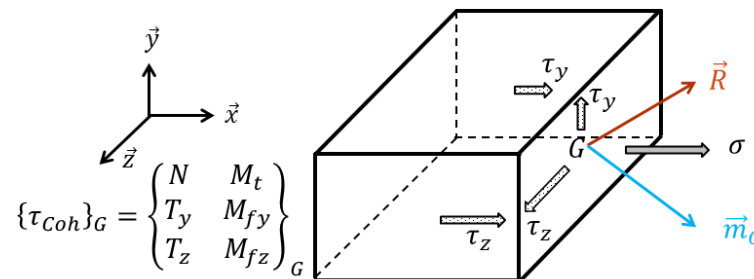
Le Principe de Saint Venant postule que quel que soit la nature d'un système de force, seul le torseur résultant au centre de gravité de la section détermine l'état de celle-ci.

Dans la section droite S, la normale $\vec{n} = \vec{x} = (1,0,0)$ et la contrainte $\vec{T}(M, \vec{x}) = \begin{pmatrix} \sigma \\ \tau_y \\ \tau_z \end{pmatrix}$.

$$\vec{R} = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} = \int_S \vec{T}(M, \vec{x}) ds$$

Les éléments du torseur de cohésion peuvent s'écrire :

$$\vec{M}_G = M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) ds$$



8. Relations entre efforts intérieurs et contraintes

$$\vec{R} = N\vec{x} + T_y\vec{y} + T_z\vec{z} = \int_S \vec{T}(M, \vec{x}) ds \quad \vec{M}_G = M_t\vec{x} + M_{fy}\vec{y} + M_{fz}\vec{z} = \int_S \overline{GM} \wedge \vec{T}(M, \vec{x}) ds$$

$$N = \int_S \sigma ds$$

$$T_y = \int_S \tau_y ds$$

$$T_z = \int_S \tau_z ds$$

En calculons les deux expressions, on trouve :

$$M_t = \int_S (y \tau_z - z \tau_y) ds$$

$$M_{fy} = \int_S z \sigma ds$$

$$M_{fz} = - \int_S y \sigma ds$$

σ est la contrainte normale

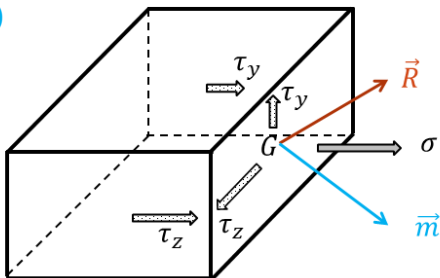
et τ_y et τ_z sont les contraintes tangentielles.

Les contraintes $(\sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{yz})$ ne figurent pas sur les éléments du torseur de cohésion.

Le tenseur de contraintes se réduit donc à :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix} (x, y, z)$$

$$\{\tau_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$



Décomposition de la solution :

Si $N \neq 0$:

Traction- compression

Si $M_{f2} \neq 0$ ou $M_{f3} \neq 0$:

Flexion pure

Si $(T_y \neq 0 \text{ et } M_{fz} \neq 0)$ ou $(T_z \neq 0 \text{ et } M_{fy} \neq 0)$:

Flexion simple

Si $M_t \neq 0$:

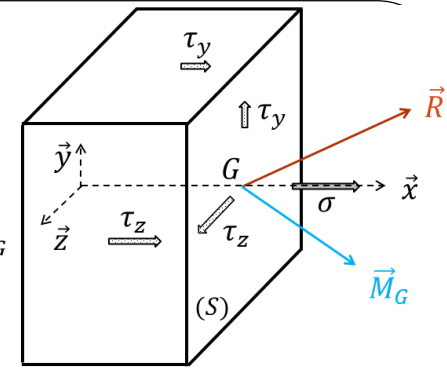
Torsion

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. **Contrainte normale**
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

9. Contrainte normale

$$N = \int_S \sigma ds \quad \left| \quad M_{fy} = \int_S z \sigma ds \quad \right| \quad M_{fz} = - \int_S y \sigma ds \quad \{ \tau_{coh} \}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$



Pour une facette de la section droite,

on constate que les éléments de réduction : N , M_{fy} et M_{fz} ne font intervenir que la contrainte normale σ .

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On choisit donc la forme suivante pour les contraintes :

- La condition aux limites sur la surface latérale $\vec{n} = (0, y, z)$, libre de contrainte est vérifiée.
- On applique les équations d'équilibre, on obtient :

$$\sigma_{,x} = 0 \Rightarrow \sigma = \sigma(y, z)$$

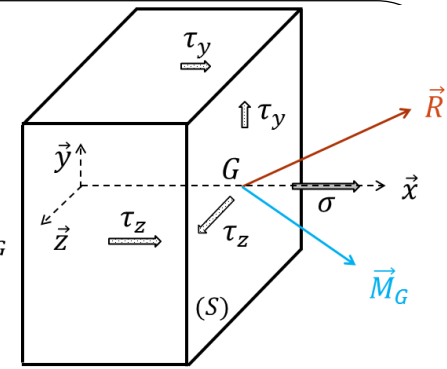
- Les équations de Beltrami s'écrivent :

$$\Rightarrow \sigma_{,yy} = \sigma_{,zz} = \sigma_{,yz} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = a + by + cz$$

$$\Delta \sigma_{ij} + \frac{\sigma_{kk,ij}}{1 + \nu} = 0$$

9. Contrainte normale



$$N = \int_S \sigma ds \quad \left| \quad M_{fy} = \int_S z \sigma ds \quad \right| \quad M_{fz} = - \int_S y \sigma ds \quad \{ \tau_{coh} \}_G = \begin{Bmatrix} N & M_t \\ T_y & M_{fy} \\ T_z & M_{fz} \end{Bmatrix}_G$$

$$\sigma = a + by + cz$$

$$N = a \int_S ds + b \int_S y ds + c \int_S z ds \quad N = a S$$

$$\rightarrow M_{fy} = a \int_S z ds + b \int_S yz ds + c \int_S z^2 ds \quad \rightarrow M_{fy} = c I_{Gy} \quad I_{Gy} = \int_S z^2 ds$$

Avec :

$$M_{fz} = -a \int_S y ds - b \int_S y^2 ds - c \int_S yz ds \quad M_{fz} = -b I_{Gz} \quad I_{Gz} = \int_S y^2 ds$$

I_{Gz} et I_{Gy} sont les moments quadratiques respectivement par rapport à Gz et à Gy (en mm⁴)

$$\rightarrow \sigma = \frac{N}{S} - \frac{M_{fz}}{I_{Gz}} y + \frac{M_{fy}}{I_{Gy}} z \quad (E)$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

Considérons la section droite $S(s)$, d'abscisse curviligne s , de centre G et normale aux fibres d'une poutre.

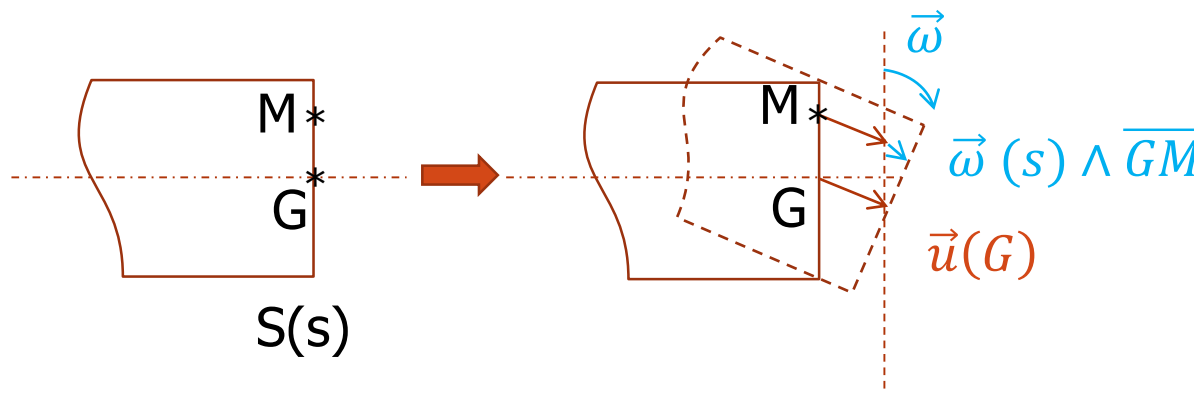
Hypothèses cinématiques

- Les dimensions transversales d'une poutre sont faibles devant les dimensions longitudinales,
- Chaque section droite $S(s)$ d'abscisse s se comporte comme un **solide** : (pas de déformation transverse possible)

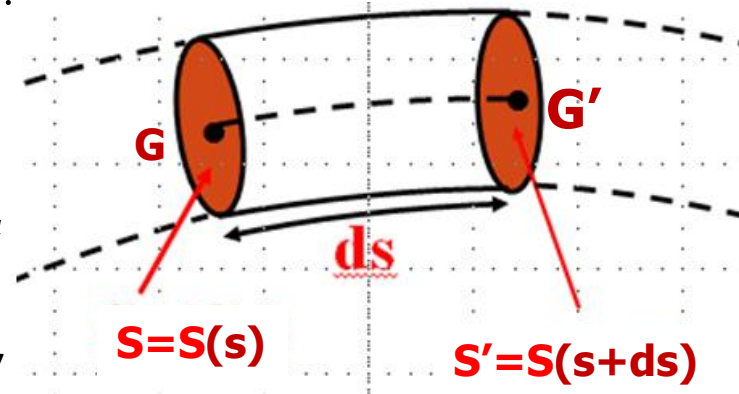
Pour la section $S(s)$, on a donc :

$$\{dep_{S/R}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(G) \end{matrix} \right\}_G$$

Pour M point de $S(s)$:

$$\vec{u}(M) = \vec{u}(G) + \vec{\omega}(s) \wedge \overrightarrow{GM}$$


Considérons une tranche élémentaire de poutre de longueur ds , comprise entre les sections droites voisines : $S(s)$ et de centres G et S' ($s+ds$) de centres G' .



Pour les section S et S' , on a : $\{dep_{S/R}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(s) \end{Bmatrix}_G$

et $\{dep_{S'/R}\}_{G'} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}(s+ds) = \vec{\omega}(s) + d\vec{\omega}(s) \\ \vec{u}(s+ds) = \vec{u}(s) + d\vec{u}(s) \end{Bmatrix}_{G'}$

Par définition, le torseur de taux de déformation :

$$\{Def S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(s) = \gamma_t \vec{t} + \gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \vec{t} + \varepsilon_n \vec{n} + \varepsilon_b \vec{b} \end{Bmatrix} = \frac{\{dep S'/R\}_{G'} - \{dep S/R\}_G}{ds}$$

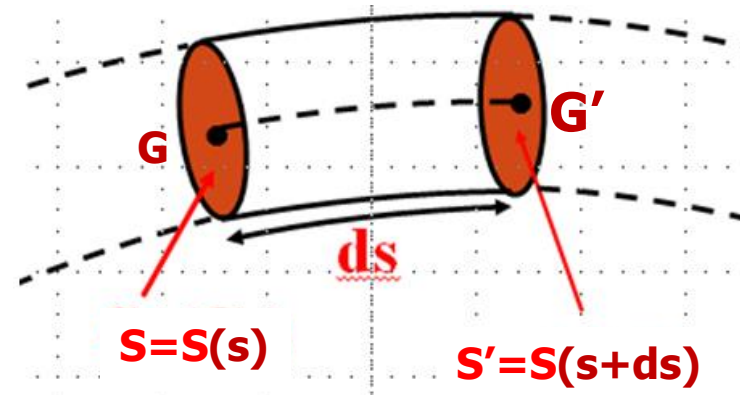
$$= \frac{d}{ds} \{dep S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \\ \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{\omega} \end{Bmatrix}_G$$

$$\rightarrow \{Def S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(s) = \gamma_t \vec{t} + \gamma_n \vec{n} + \gamma_b \vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \varepsilon_t \vec{t} + \varepsilon_n \vec{n} + \varepsilon_b \vec{b} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{d\vec{\omega}(s)}{ds} \\ \frac{d\vec{u}(s)}{ds} + \vec{t} \wedge \vec{\omega} \end{Bmatrix}_G$$

$\vec{\varepsilon}(s)$: vecteur dilatation ou allongement relatif

$\vec{\gamma}(s)$: vecteur glissement ou distorsion

Déformation	Sollicitation
$\varepsilon_t = \varepsilon = \frac{N}{ES}$	Traction- compression
$\varepsilon_n = \frac{T_n}{GS}$	Cisaillement
$\varepsilon_b = \frac{T_b}{GS}$	
$\gamma_t = \theta = \frac{Mt}{GI_G}$	Torsion
$\gamma_n = \ddot{y}_b = \frac{Mf_n}{EI_n}$	Flexion simple
$\gamma_b = \ddot{y}_n = \frac{Mf_b}{EI_b}$	



Ces relations vont être vues plus loin dans les chapitres suivants.

Le torseur des taux de déformation s'écrit enfin en fonction des efforts intérieurs :

$$\{Def S/R\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{\gamma}(s) = \frac{Mt}{GI_G} \vec{t} + \frac{Mf_n}{EI_n} \vec{n} + \frac{Mf_b}{EI_b} \vec{b} \\ \vec{\varepsilon}(s) = \frac{N}{ES} \vec{t} + \frac{T_n}{GS} \vec{n} + \frac{T_b}{GS} \vec{b} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \frac{Mt}{GI_G} & \frac{N}{ES} \\ \frac{Mf_n}{EI_n} & \frac{T_n}{GS} \\ \frac{Mf_b}{EI_b} & \frac{T_b}{GS} \end{Bmatrix}_G$$

Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

11. Condition de résistance

Pendant toute la durée de son service, une pièce doit conserver un comportement élastique. Cette condition s'exprime par :

Contraintes normales : $\sigma_{maxi} \leq \sigma_p = \frac{\sigma_e}{s}$ ou $\sigma_{maxi} \leq R_{pe} = \frac{R_e}{s}$

σ_e ou R_e : Limite élastique à la traction

σ_p ou R_{pe} : Résistance pratique à la traction

s : coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon le domaine d'application.

Contraintes tangentielles : $\tau_{maxi} \leq \tau_p = \frac{\tau_e}{s}$ ou $\tau_{maxi} \leq R_{pg} = \frac{R_g}{s}$

τ_e ou R_g : Limite élastique au cisaillement

τ_p ou R_{pg} : Résistance pratique au glissement.

Pour une contrainte combinée : normales σ + tangentielles τ

Critère de Tresca : $\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq \sigma_p$

Critère de Von Mises : $\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq \sigma_p$

Des pièces industrielles peuvent posséder des singularités de formes (perçages, gorges, rainures, filetages...). Ces singularités font augmenter la contrainte.

On définit un coefficient de concentration de contrainte K_t tel que : $\sigma_{maxi} = k_t \cdot \sigma_{nom}$

σ_{maxi} : contrainte maximale atteinte au voisinage de la singularité

σ_{nom} : contrainte moyenne nominale calculée loin de la singularité :

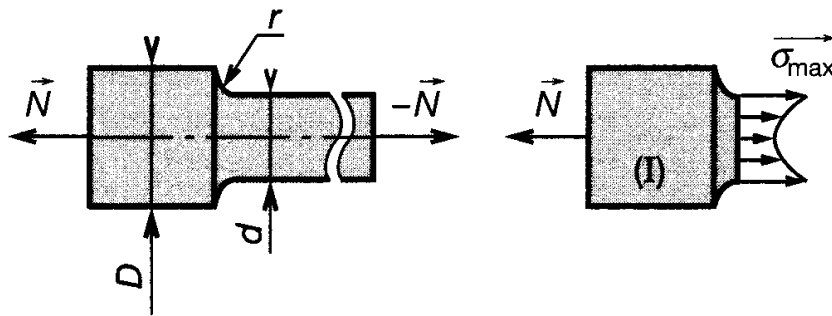
La condition de résistance s'écrit dans ce cas :

$$\sigma_{maxi} = k_t \cdot \sigma_{nom} \leq \sigma_p$$



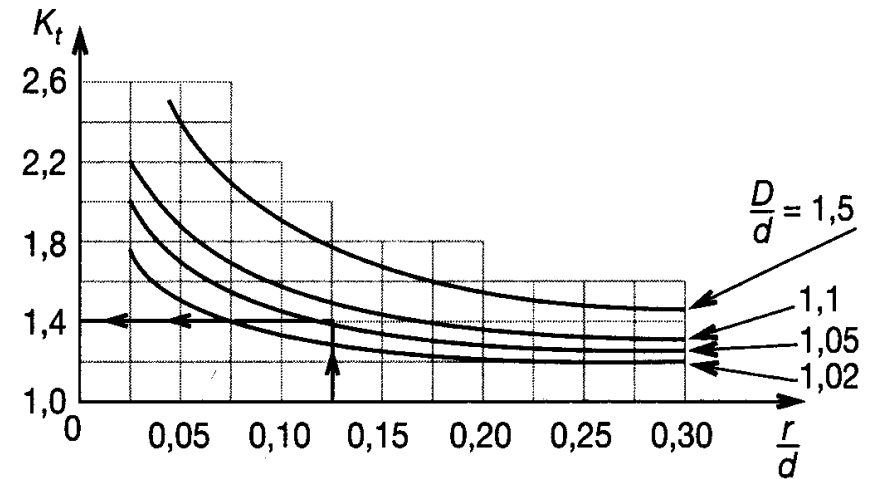
Exemple 1 : Pour un filetage triangulaire ISO $K_t = 2.5$

Exemple 2 : Arbre de section circulaire épaulé.



$$|\sigma|_{\max} = K_t |\sigma_{\text{nom}}|$$

$$|\sigma_{\text{nom}}| = \frac{|N|}{S} \quad S = \frac{\pi d^2}{4}$$



Exemple : $\frac{r}{d} = 0,125$; $\frac{D}{d} = 1,05$; $K_t = 1,4$

Exemple : si une vis de diamètre 6 mm peut tenir un objet d'une tonne, elle peut en revanche casser si on lui suspend un objet de 100 kg un million de fois de suite.

La **fatigue** désigne l'endommagement d'une pièce sous l'effet d'efforts variables et répétés, vibrations, rafales de vent...

L'application et le retrait d'efforts plus faibles que prévu peut provoquer sa rupture.

Les étapes principales de la ruine d'un assemblage par fatigue sont :

- l'amorçage de fissures (si des défauts ne sont pas déjà présents dans le matériau).
- la propagation de fissures.
- et la rupture finale.

Les paramètres souvent utilisés pour prédire le comportement en fatigue sont :

- l'amplitude de la sollicitation (chargement ou déformation imposée).
- fréquence d'application des charges,
- nombre de cycles.

Courbe de Wöhler :

Zone 1 : c'est la zone de fatigue ou la rupture est atteinte au bout d'un nombre limité de cycles. Si pour une sollicitation ou la contrainte maximale par exemple est $\sigma = 300\text{MPa}$, la rupture se produit avec une probabilité correcte avant 10^4 cycles.

Zone 2 : c'est la zone d'endurance illimité ou la rupture n'est atteinte qu'après un nombre élevé de cycles proche de 10^8 .

L'asymptote à la courbe de Wöhler permet de trouver la limite d'endurance σ_D au-dessous de la quelle il n'y aura pas de risque de rupture.

Pour les aciers, σ_D pourrait être trouvée expérimentalement :

σ_e : limite d'élasticité

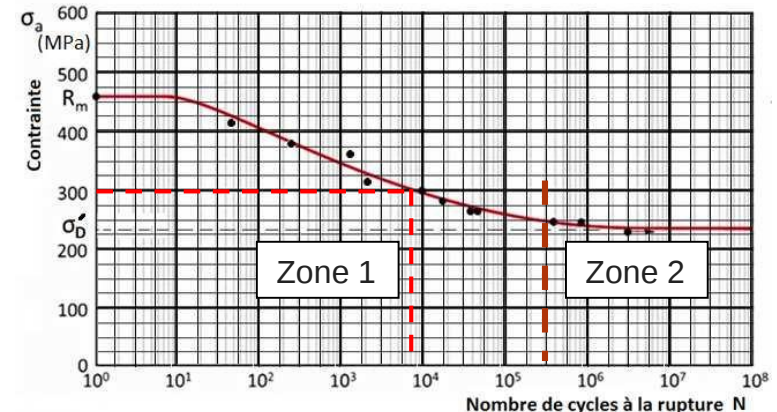
σ_r : limite de rupture

σ_D : limite d'endurance

$\sigma_D = 0.4 \sigma_e + 0.25 \sigma_r$	Roger
$\sigma_D = 0.32 \sigma_r + 121$	Brand

Condition de résistance à la fatigue :

$$\sigma_{maxi} \leq \sigma_D$$



Plan du cours

1. But
2. Hypothèses
3. Principe fondamental de la statique
4. Repère de Frenet
5. Torseur des efforts de cohésion
6. Contraintes
7. Équations d'élasticité
8. Relation entre efforts intérieurs et contraintes
9. Contrainte normale
10. Relation entre efforts intérieurs et déformations
11. Condition de résistance
12. Condition de rigidité ou de déformation

12. Condition de rigidité ou de déformation

La condition de résistance donne des pièces sous-dimensionnées très déformables et qui sont source de vibrations et ne réalisent pas des transmissions rigides.

Beaucoup de pièces se calculent par une condition de déformation en déplacement ou en rotation :

$$y_{maxi} \leq y_{limite} \quad \text{ou bien :} \quad \alpha_{Maxi} \leq \alpha_{limite}$$