

ELASTICITE

01- Contraintes

Bibliographie

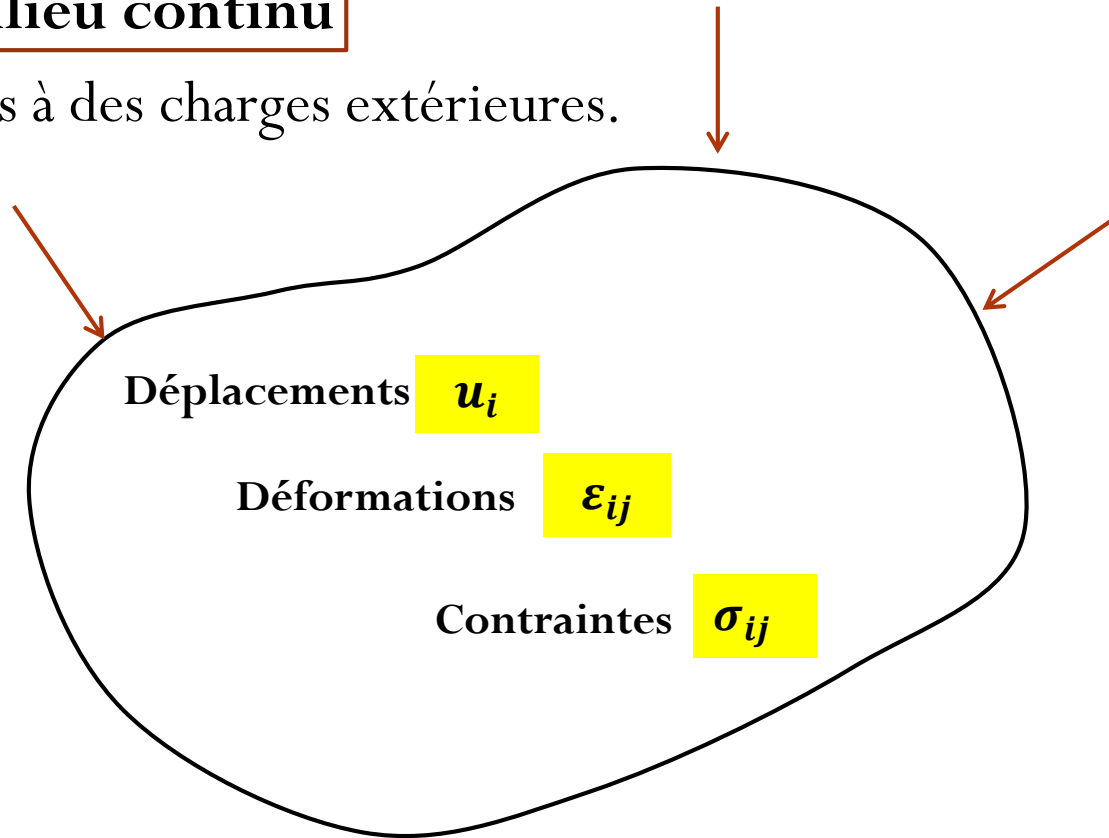
- Yves Debard : Institut Universitaire de Technologie du Mans, Département Genie Mecanique et Productique, <http://iut.univ-lemans.fr/ydlogi/index.html>
- J. P. Henry, F. Parsy « Cours d'élasticité ». Dunod Université

Objet de l'élasticité

La théorie de l'élasticité étudie :

D'un **milieu continu**

soumis à des charges extérieures.



Milieu continu

A l'échelle nanoscopique un solide est **granulaire**, fait de molécules.

Mais à l'œil nu ce solide est perçu comme **continu**

➡ Ses propriétés varient progressivement.

Hypothèse des milieux continus : consiste à considérer les fonctions caractéristiques du milieu (densité, température, pression, élasticité, etc) des fonctions continues.

Un milieu diphasique et certain mélange comme eau-huile sont des milieux non continus

Un milieu continu peut être :

homogène : il a les mêmes propriétés en tout point

isotrope : en un point donné, il a les mêmes propriétés dans toutes les directions.



Matériaux

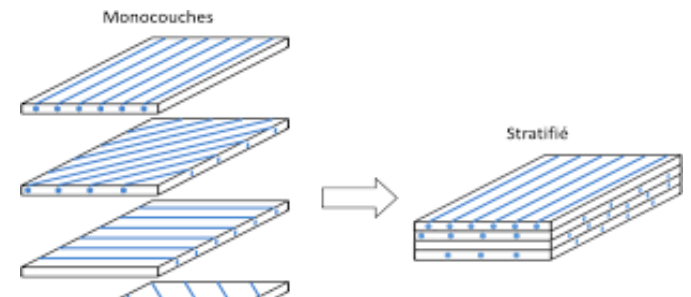
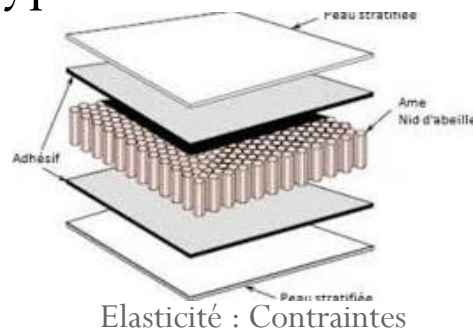
De nombreux matériaux utilisés dans l'industrie sont à la fois homogènes et isotropes : métaux usinés ou bruts de fonderie.

D'autres matériaux ne sont pas isotropes : tôles laminées, pièces forgées, pièces tréfilées, etc.

Les matériaux composites sont des milieux qui ne sont :

- ni homogènes : sandwich (deux peaux collées sur une âme : mousse de polymère ou un nid d'abeille).
- ni isotropes : stratifié (fibres de verre, de carbone ou de kevlar maintenues dans une résine).

Mais pour lesquels l'hypothèse de continuité reste valable dans leur totalité ou par morceaux.



Plan

1. vecteur contrainte
2. Tenseur de contraintes
3. Equations d'équilibre
4. Relation de Cauchy
5. Directions et contraintes principales
6. Cercles de Mohr
7. Etats de contrainte particuliers

On effectue une **coupure** par la surface S , en deux parties $E1$ et $E2$.

La partie $E1$, par exemple, est en équilibre sous l'action :

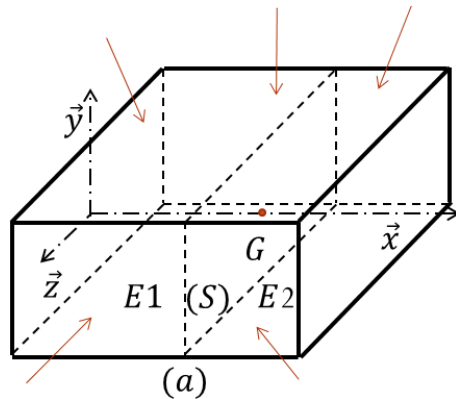
- des forces extérieures qui lui sont directement appliquées
- et des forces intérieures réparties sur la coupure.

Considérons :

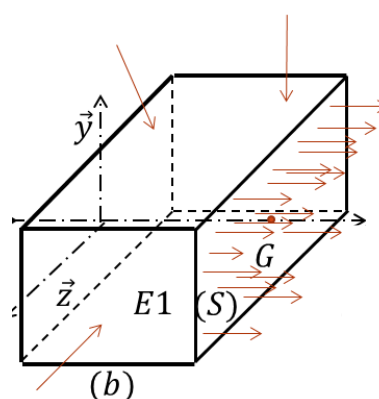
- un point M de S et dS élément de la surface infiniment petit entourant M .
- $\vec{n}$ vecteur unitaire, normal en M à S dirigé vers l'extérieur de la partie $E1$
- Soit $d\vec{F}$ la force qui s'exerce sur la **facette** $\vec{n}$ en M .

On appelle vecteur contrainte sur la facette $\vec{n}$ en M , la quantité : $\vec{T}(M, \vec{n}) = \frac{d\vec{F}}{dS}$

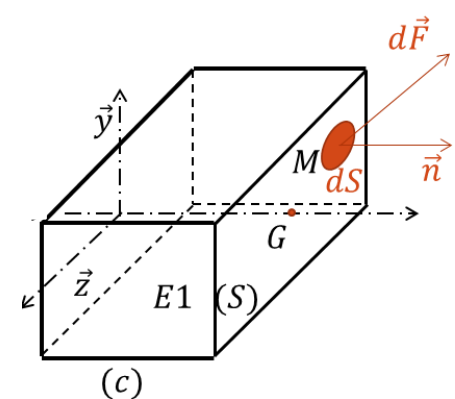
Soit un
solide E



(a)



(b)



(c)

Le vecteur contrainte peut être décomposé en :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$$

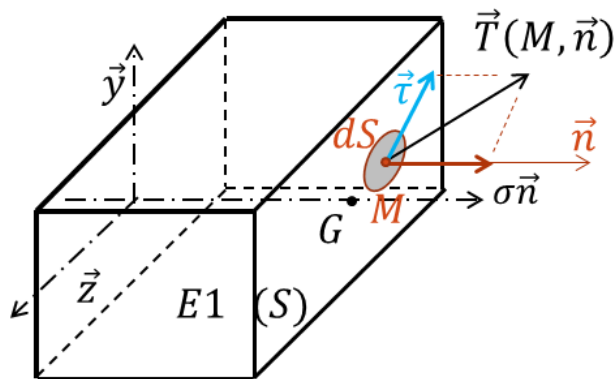
- Contrainte normale σ
- projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur la normale $\vec{n}$ de la facette.
 - Si σ est positive, on a localement un état de traction,
 - sinon c'est un état de compression.
- Contrainte tangentielle τ ,
- appelée aussi contrainte de cisaillement ou cession
- projection de $\vec{T}(M, \vec{n})$ sur le plan de la facette.

Avec :

$$\|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 = \sigma^2 + \|\vec{\tau}\|^2$$

$$\sigma = \vec{T}(M, \vec{n}) \cdot \vec{n}$$

$$\|\vec{\tau}\|^2 = \|\vec{T}(M, \vec{n})\|^2 - \sigma^2$$



II. Tenseur des contraintes

Considérons le cube infiniment petit d'un solide, centré sur le point M, construit sur les axes x, y et z .

Sur la facette $\vec{i}$: $\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} + \sigma_{zx}\vec{k}$

Sur la facette $\vec{j}$: $\vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k}$

Sur la facette $\vec{k}$: $\vec{T}(M, \vec{k}) = \sigma_{xz}\vec{i} + \sigma_{yz}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$

$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \cdot \vec{i}$$

Avec : $\vec{T}(M, \vec{j}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \cdot \vec{j}$

$$\vec{T}(M, \vec{k}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \cdot \vec{k}$$

Soit le tenseur $\bar{\bar{\sigma}}(M)$

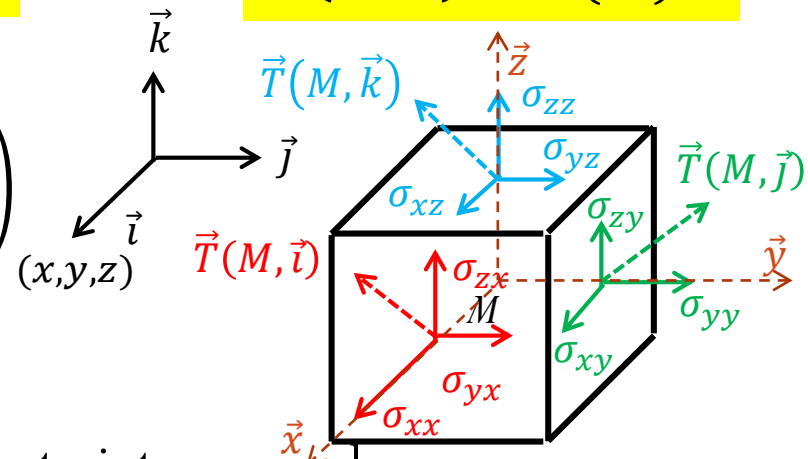
En notation indicielle

$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

En notation vectorielle facette $\vec{n}$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \bar{\bar{\sigma}}(M) \vec{n}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \vec{T}(M, \vec{i}) & \vec{T}(M, \vec{j}) & \vec{T}(M, \vec{k}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$



$\bar{\bar{\sigma}}(M)$ est le tenseur des contraintes de Cauchy.

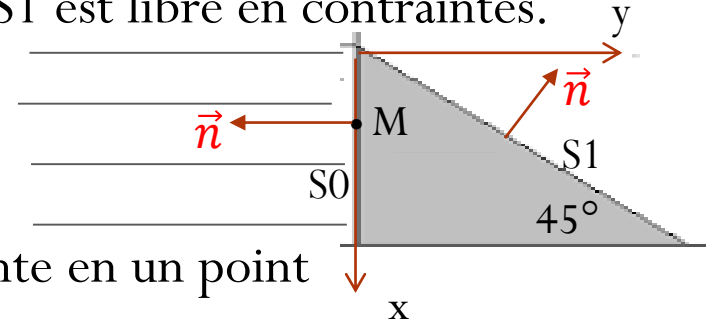
Les termes diagonaux $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ sont les contraintes normales

Les termes non diagonaux σ_{ij} ou τ_{ij} sont les contraintes tangentielles.

Etant donné un barrage d'eau. Le tenseur de contrainte est donné ci-dessous.

La surface S0 reçoit la pression de l'eau et la surface S1 est libre en contraintes.

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\{x_1, x_2, x_3\}}$$



1. Sur la surface S0 du barrage : Exprimer la contrainte en un point M puis déduire σ_{12} , σ_{22} et σ_{32}
2. Sur la surface S1 du barrage : Exprimer la contrainte en un point M puis déduire la relation qui lie $(\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22})$ puis la relation qui lie $(\sigma_{13}, \sigma_{22})$

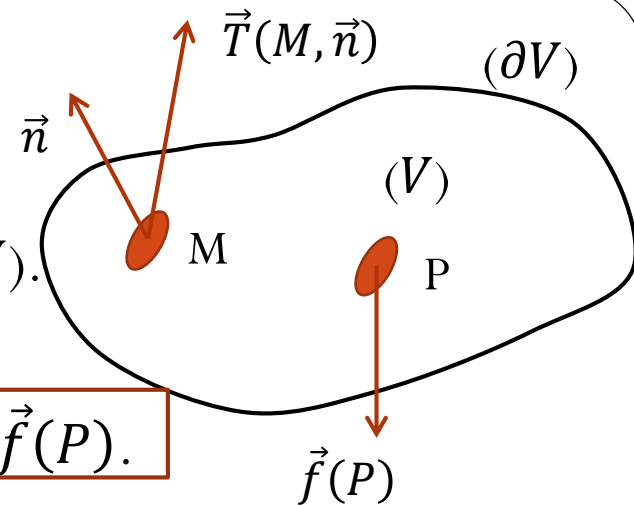
III. Equations d'équilibre

Données du problème

Prenons un solide déformable pour lequel on isole un domaine borné (V) délimité par une surface fermée (∂V) .

Le domaine est soumis à :

des forces surfaciques $\vec{T}(M, \vec{n})$ et des forces de volume $\vec{f}(P)$.



Le théorème de la résultante dynamique appliqué au domaine s'écrit :

$$\int_{\partial V} \vec{T}(M, \vec{n}) ds + \int_V \vec{f}(P) dV = \int_V \rho \vec{\gamma} dV$$

$\vec{\gamma}$ est l'accélération du point P et ρ est la masse volumique du matériau.

Le théorème de la divergence permet de transformer l'intégrale surfacique :

$$\int_{\partial V} \vec{T}(M, \vec{n}) ds = \int_{\partial V} \bar{\sigma}(P) \vec{n} ds = \int_V \text{div } \bar{\sigma}(P) dV$$



$$\text{div } \bar{\sigma}(p) + \vec{f}(p) = \rho \vec{\gamma}$$

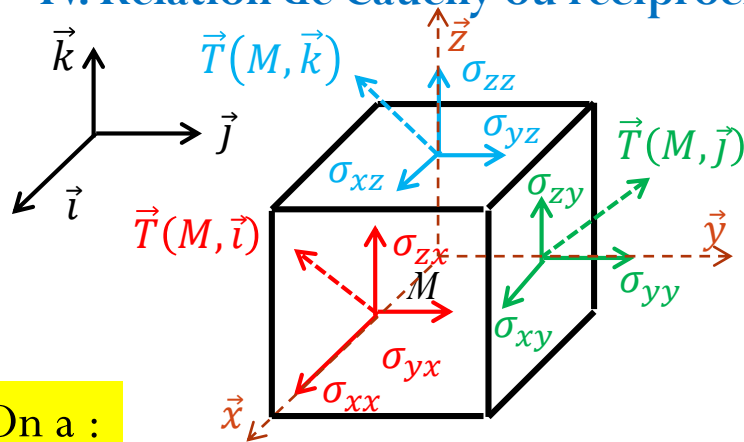
Forme vectorielle

Ou encore :

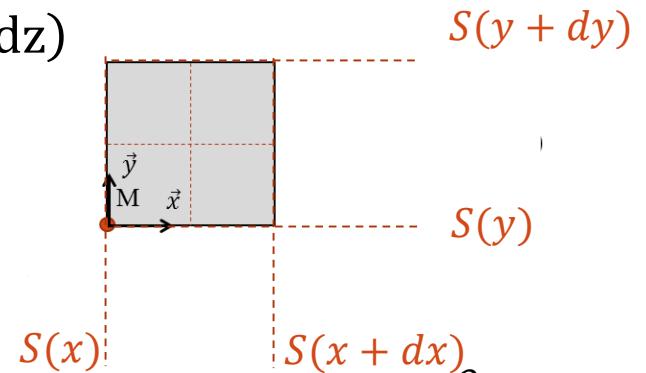
$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \gamma_i$$

Forme indicielle en repère cartésien

IV. Relation de Cauchy ou réciprocity des contraintes τ_{ij}



Cube infiniment petit
($da = dx = dy = dz$)



On a :

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x + dx, y, z) &= \sigma_{xx}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx & \sigma_{yy}(x, y + dy, z) &= \sigma_{yy}(x, y, z) + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \\ \tau_{yx}(x + dx, y, z) &= \tau_{yx}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx & \tau_{xy}(x, y + dy, z) &= \tau_{xy}(x, y, z) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\end{aligned}$$

TMD/MZ

$$\begin{aligned}& \left[\sigma_{xx} - \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx \right) \right] dydz \frac{da}{2} + \left[-\sigma_{yy} + \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dy \right) \right] dxdz \frac{da}{2} \\ & - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dxdz da + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dx \right) dydz da = 0\end{aligned}$$

On se limite à l'ordre 3 : $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

TMD/Mx et My :

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

Soit encore : $\tau_{ij} = \tau_{ji}$

$$[\sigma] = [\sigma]^T$$

Le tenseur des contraintes est symétrique

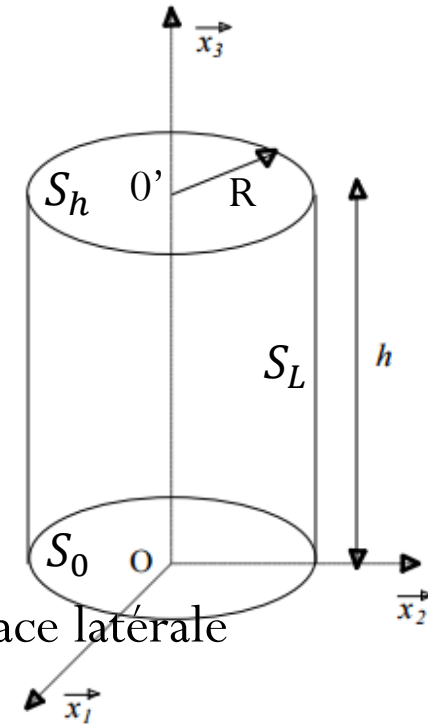
Relation de Cauchy ou réciprocity des contraintes tangentielle

Les contraintes tangentielles de deux faces perpendiculaires sont égales et dirigées vers l'arête commune.

Etant donné un cylindre : rayon R , hauteur h , surfaces de bases S_0 et S_h , surface latérale S_L .

En tout point P du cylindre on a :

$$\bar{\bar{\sigma}}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{12} & -kx_2 \\ \sigma_{12} & 0 & kx_1 \\ -kx_2 & kx_1 & 0 \end{pmatrix} \quad k = \text{Cte}$$



1. Unité de k .
2. Déterminer σ_{12} si les forces de volume sont négligées et la surface latérale S_L est libre en contraintes.
3. Vérifier la relation d'équilibre.
4. Déterminer le torseur des forces surfaciques sur la surface de base S_h réduit au centre O'
5. Déduire auquel type de sollicitation est soumis le cylindre et la valeur de k .

Soit le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n}')$ d'une facette $\vec{n}'$

Prenons le cas où le vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$ et la facette $\vec{n}$ sont colinéaire.

Dans ce cas, le vecteur cisaillement est nul sur cette facette :

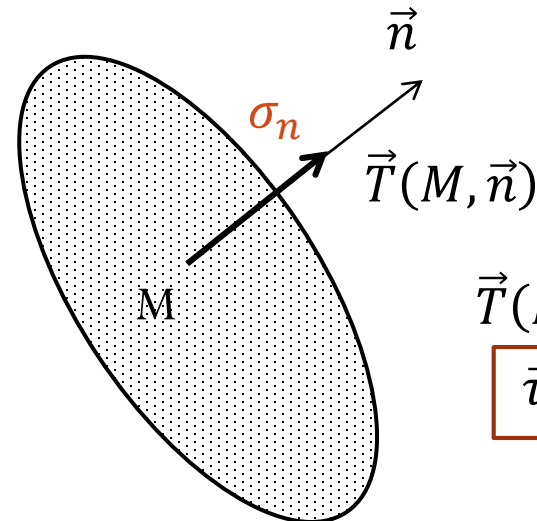
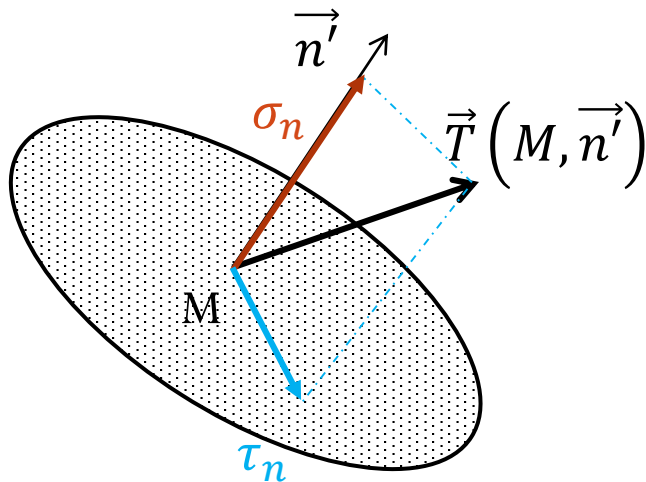
$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} = \bar{\sigma}(M) \vec{n} \quad \text{En écriture matricielle} \quad [\sigma(M)]\{n\} = \sigma_n \{n\}$$

Ou bien encore :

$$[[\sigma(M)] - \sigma_n [I]]\{n\} = \{0\}$$

σ_n est **valeur propre** du tenseur des contraintes

$\{n\}$ est le **vecteur propre** associé.



$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n}$$

$$\vec{\tau}_n = 0$$

Il existe en M un repère orthonormé $R_p(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$ pour lequel le cisaillement est nul. σ_1, σ_2 et σ_3 :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$$

Contraintes principales

Les directions principales correspondent à la présence d'axes de révolution ou aux symétries dans le matériel ou dans la charge.

$R_p(M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3)$:
Repère principal



$\vec{n}_1, \vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$:

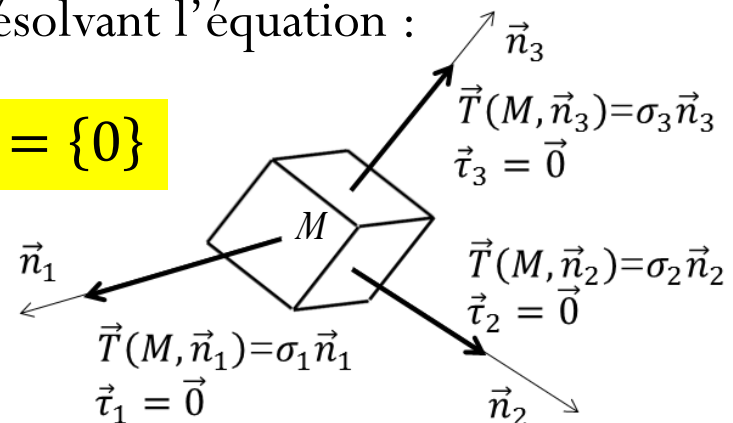
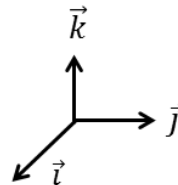
Directions principales

Les **contraintes principales** sont racines de l'équation caractéristique :

$$\det ([\sigma(M)] - \sigma_i [I]) = 0$$

Les **directions principales** $\vec{n}_i$ s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$([\sigma(M)] - \sigma_i [I])\{n_i\} = \{0\}$$



Soit l'état de contrainte suivant :

1. Trouver les contraintes principales
2. Trouver les directions principales,

V. Contraintes et directions principales

Soit l'état de contrainte suivant :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\{R \text{ quelconque}\}} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{\{R \text{ principal}\}}$$

L'équation caractéristique s'écrit : $P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n[I]) = 0$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui donne : $-\sigma_n^3 + I_1\sigma_n^2 - I_2\sigma_n + I_3 = 0$

Avec :

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$$

$$I_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{13}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$



$$I_1 = \text{tr}(\sigma)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \left((\text{tr}(\sigma))^2 - \text{tr}(\sigma^2) \right)$$

$$I_3 = \det(\sigma)$$

I_1 , I_2 et I_3 sont des invariants scalaires quelle que soit la base où est exprimé le tenseur de contraintes.

Soit l'état de contrainte de l'exercice 03 :

1. Calculer la valeur des invariants scalaires dans les deux bases (x, y, z) et (X_1, X_2, X_3)

$$\bar{\bar{\sigma}}(P) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3\sqrt{3} \\ 0 & 25 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 0 & 13 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}(P) = \begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}_{(X_1,X_2,X_3)}$$

VI. Tenseur sphérique et tenseur déviateur

Soit en un point M : $\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}_{\{x_1, x_2, x_3\}}$

On pose

$$\sigma_m = -p = \frac{1}{3} \text{trace}(\bar{\bar{\sigma}}) = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

Le tenseur de contraintes peut être écrit sous la forme :

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11} + p & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} + p & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} + p \end{pmatrix}$$



Tenseur contrainte

$\bar{\bar{\sigma}}_S$: Tenseur sphérique :
définit une Compression isotrope

$\bar{\bar{\sigma}}_D$: Tenseur déviateur
représente le reste

changement de volume sans
changement de forme

changement de forme sans
changement de volume

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_M &= \bar{\bar{\sigma}}_S + \bar{\bar{\sigma}}_D \\ \sigma_{ij} &= -p\delta_{ij} + S_{ij} \\ \text{trace}(\bar{\bar{\sigma}}) &= -3p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_S &= \frac{\text{trace}(\bar{\bar{\sigma}})}{3} \bar{\bar{I}} = -p\bar{\bar{I}} \\ \text{trace}(\bar{\bar{\sigma}}_S) &= -3p \\ \sigma_{s\,ij} &= -p\delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\sigma}}_D &= \bar{\bar{S}} = \bar{\bar{\sigma}} - \frac{\text{trace}(\bar{\bar{\sigma}})}{3} \bar{\bar{I}} \\ \text{trace}(\bar{\bar{\sigma}}_D) &= 0 \\ S_{ij} &= \sigma_{ij} + p\delta_{ij} \end{aligned}$$

"La compression isotrope n'a aucune influence sur le domaine élastique" [Bridgman et Nadai]

- $J_1 = tr(\bar{\bar{\sigma}}_D) = 0$
- $J_2 = \frac{1}{2} \left((tr(\bar{\bar{\sigma}}_D))^2 - tr(\bar{\bar{\sigma}}_D)^2 \right)$

$$= \frac{1}{2} (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2)$$

$$= S_1 S_2 + S_1 S_3 + S_2 S_3$$

$$= -\frac{1}{6} ((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2)$$

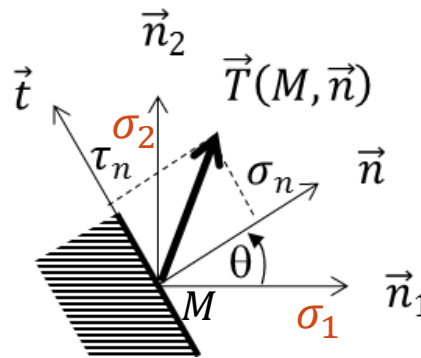
$$= \frac{1}{6} [(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2$$

$$+ 6(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2)]$$
- $J_3 = det(\bar{\bar{\sigma}}_D) = S_1 S_2 S_3$

VII. Cercle de Mohr des contraintes

Les cercles de Mohr : Représentation graphique plane

Pour une facette $\vec{n}$,



Exprimer les relations entre : (σ_n, τ_n) et $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{R}\{\mathbf{M}, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b}\} & & \mathbf{R}_p\{\mathbf{M}, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\} \end{array}$$

VII. Cercle de Mohr des contraintes

Dans le plan

On définit $\vec{T}(M, \vec{n}) = (\sigma_n, \tau_n) = f(\sigma_p = \sigma_1, \sigma_2)$

Repère de la facette

$$R\{M, \vec{n}, \vec{t}, \vec{b}\}$$

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

$$\tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

$$[\bar{\sigma}(M)]\{n\}$$

Repère principal

$$R_p\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}$$

$$\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}$$

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}_{\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}}$$

$$\vec{t} = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{b}\}$$

Les contraintes normales et tangentiels s'écrivent (σ_n, τ_n) :

$$\begin{cases} \sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{n\}^t [\bar{\sigma}(M)] \{n\} = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta \\ \tau_n = \vec{t} \cdot \vec{T}(M, \vec{n}) = \{t\}^t [\bar{\sigma}(M)] \{n\} = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta \end{cases}$$

On pose :

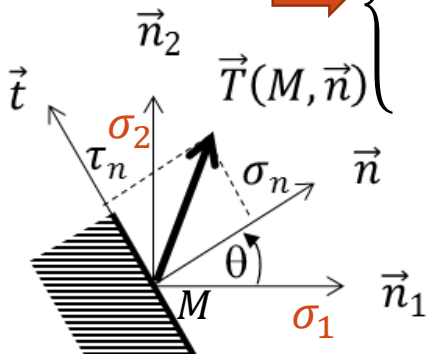
$$\begin{cases} \sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(-2\theta) \\ \tau_n = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(-2\theta) \end{cases} \xrightarrow{(E)} \begin{cases} \sigma_n = d + r \cos(-2\theta) \\ \tau_n = r \sin(-2\theta) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\ r &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \end{aligned}$$

(E) devient : $(\sigma_n - d)^2 + \tau_n^2 = r^2$

C'est l'équation d'un cercle de centre $(d, 0)$ et de rayon r

Exprime σ_n, τ_n en fonction de σ_1, σ_2 et de l'orientation de la facette θ .



Cercle de Mohr

$$(\sigma_n - d)^2 + \tau_n^2 = r^2$$

$$d = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

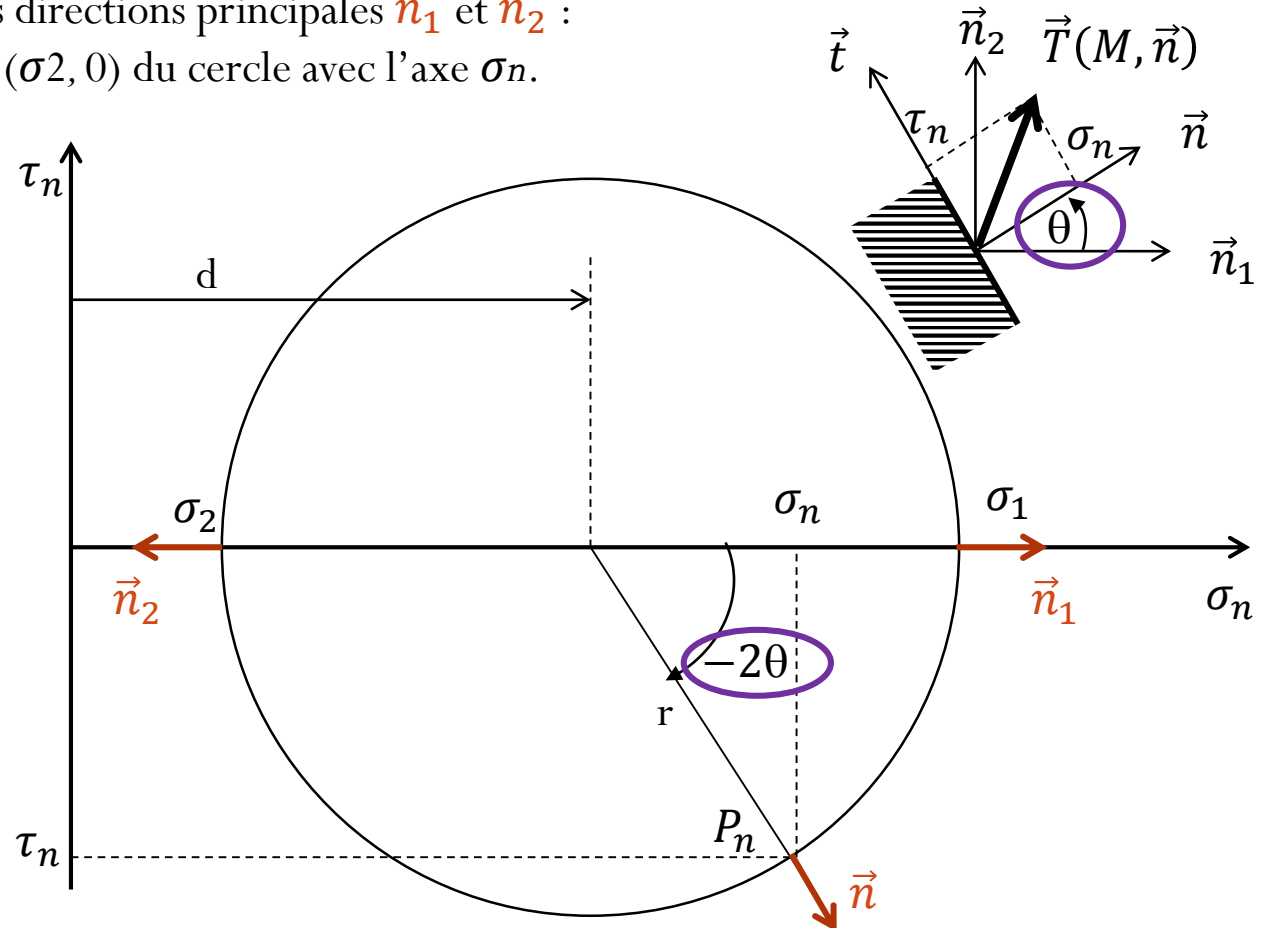
$$r = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

- A chaque facette $\vec{n}$:
est associé un point P_n de coordonnées (σ_n, τ_n) dans le repère $\{\sigma_n, \tau_n\}$ orthonormé.
- Les points représentatifs des directions principales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$:
sont les intersections $(\sigma_1, 0)$ et $(\sigma_2, 0)$ du cercle avec l'axe σ_n .

Si les facettes $\vec{n}$ et $\vec{n}_1$ font un angle θ :



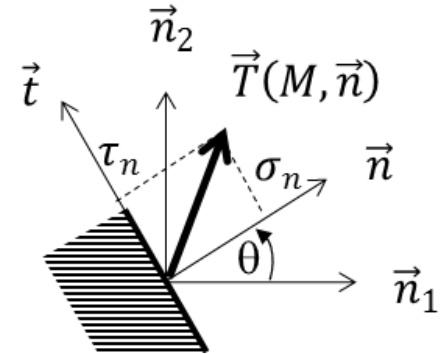
Sur le cercle de Mohr :
Leurs points représentatifs font un angle -2θ .



Généralisons la représentation de Mohr sur les 3 σ_p ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$).

Le vecteur contrainte en un point M sur une facette $\vec{n}$ (a,b,c):

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = [\bar{\sigma}(M)]\{n\} = \sigma_n \vec{n} + \tau_n \vec{t}$$



On a les 3 relations :

$$\begin{cases} \sigma_n = \{n\}^t([\bar{\sigma}(M)]\{n\}) \\ T^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \{n\}^t\{n\} = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{S'écrivent dans} \\ \text{R}_p\{M, \vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3\} \end{array} \quad \begin{cases} \sigma_1 a^2 + \sigma_2 b^2 + \sigma_3 c^2 = \sigma_n \\ \sigma_1^2 a^2 + \sigma_2^2 b^2 + \sigma_3^2 c^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

Si $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3$:

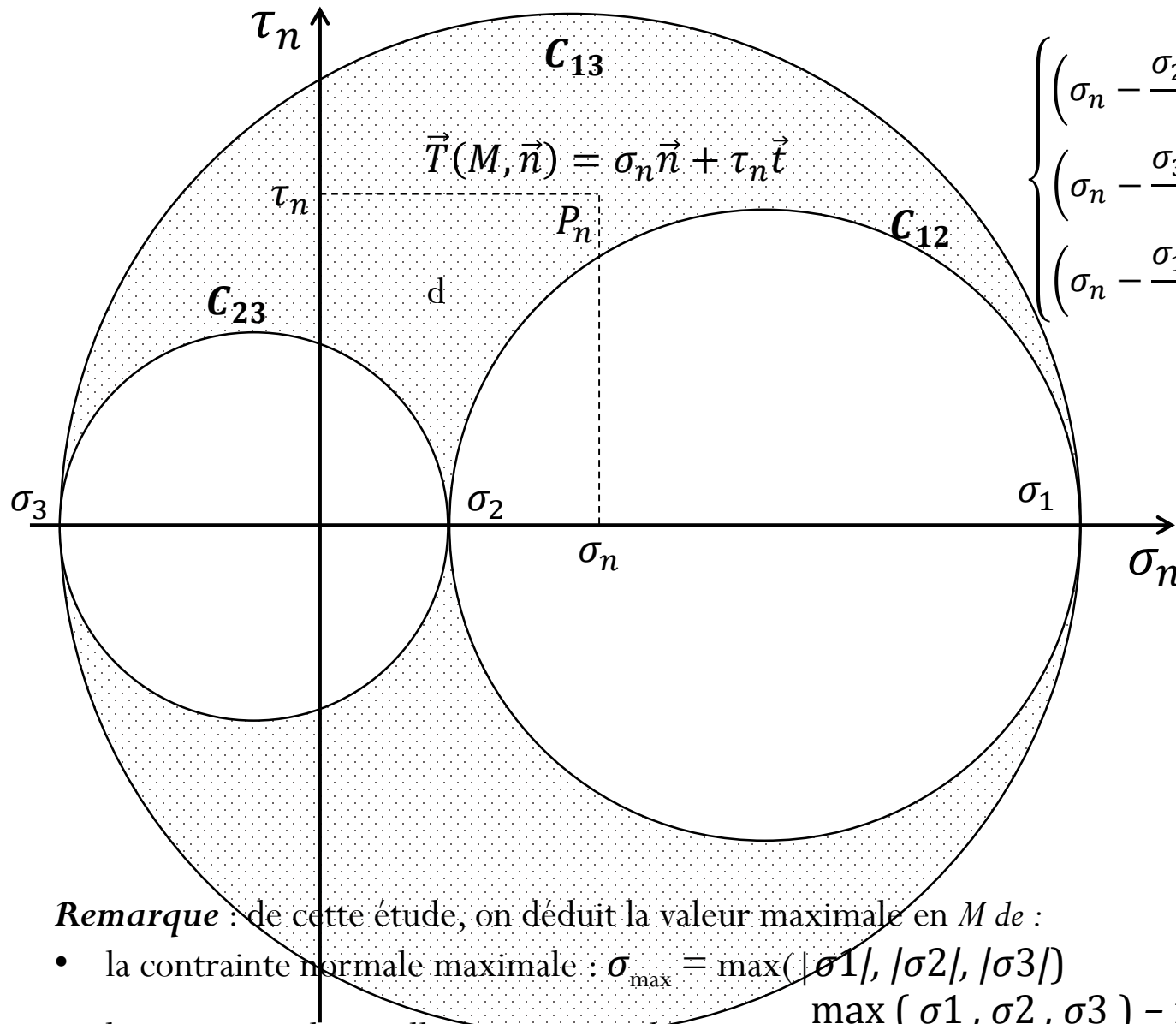
$$\begin{cases} a^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \\ b^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \\ c^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \end{cases}$$

Sachant les inégalités suivantes :

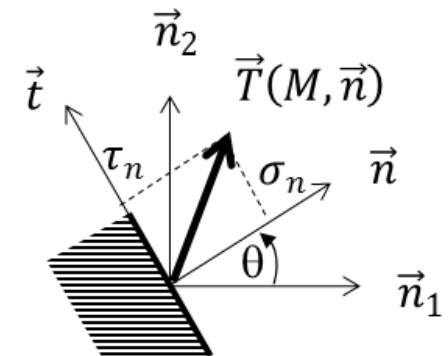
$$\begin{cases} a^2 \geq 0 \\ b^2 \geq 0 \\ c^2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{et si } \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\begin{cases} \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0 \\ \tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \end{cases} \quad \text{Ou encore :}$$

$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \\ \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \end{cases}$$

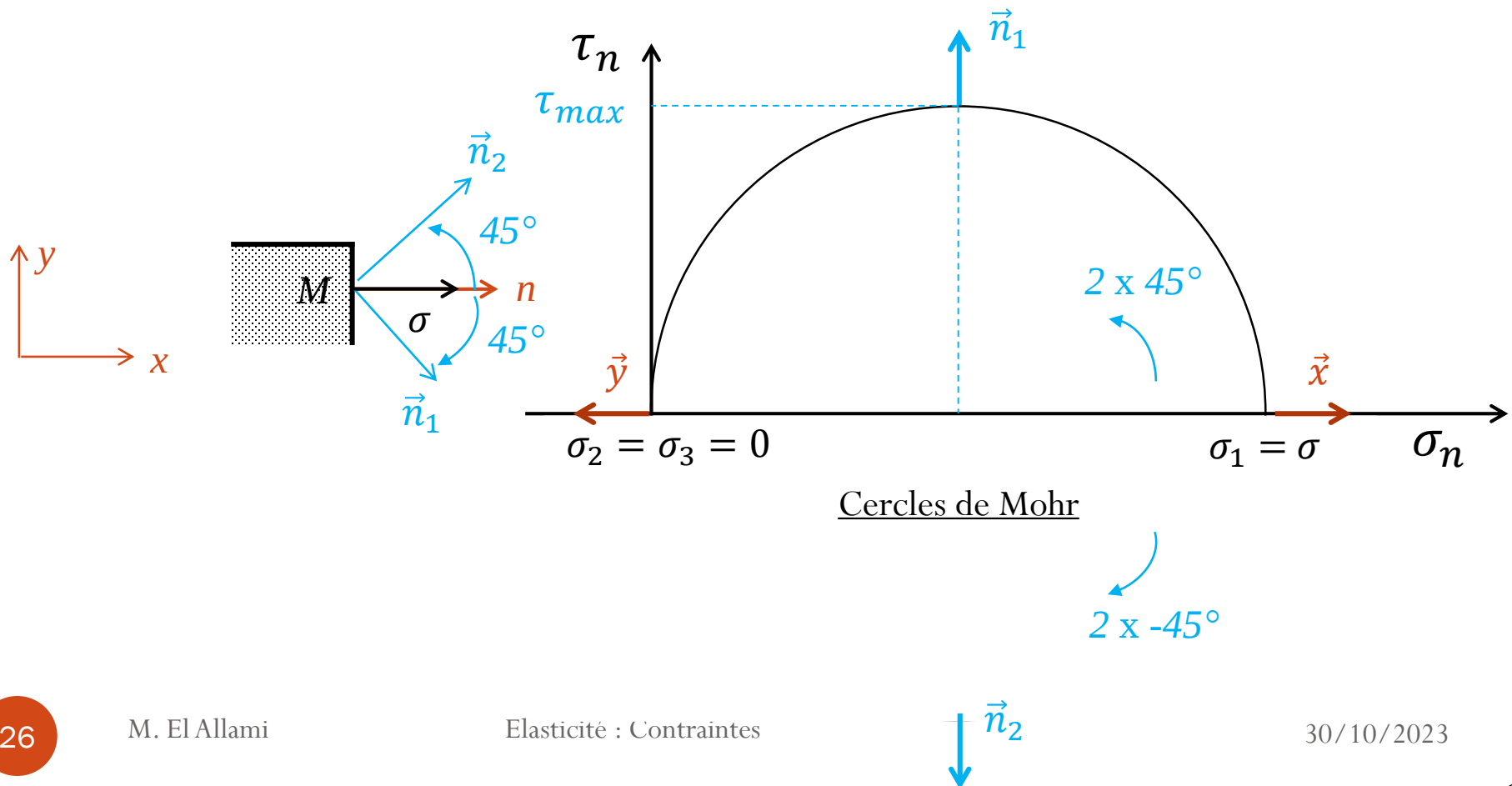


Remarque : de cette étude, on déduit la valeur maximale en M de :

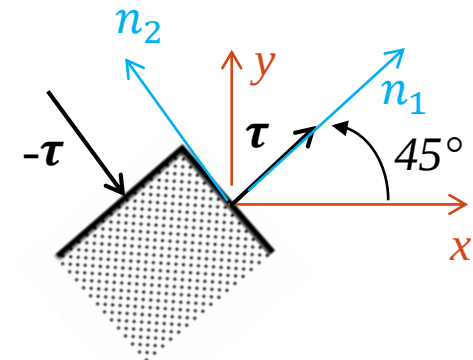
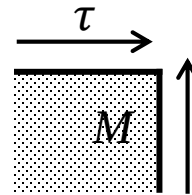
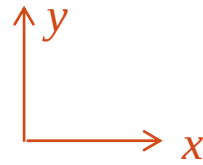
- la contrainte normale maximale : $\sigma_{\max} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|)$
- la contrainte du cisaillement maximale : $\tau_{\max} = \frac{\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)}{2}$

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$

le repère $\{M; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ est principal.

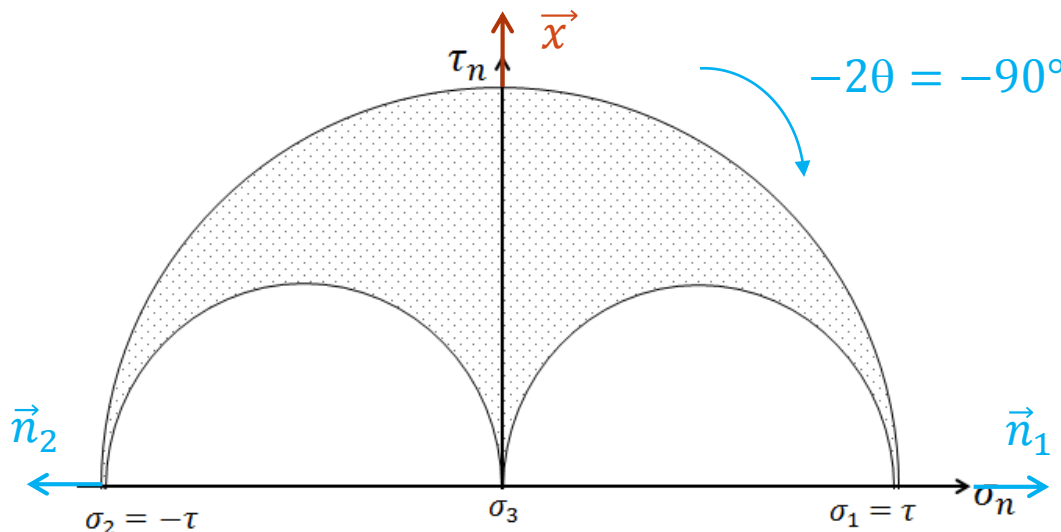


$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{xyz}$$



Le repère $\{M, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ n'est pas principal.

$\vec{z}$ Axe principal $\sigma_3 = 0$



Cercles de Mohr

Contraintes principales :

$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau$ et $\sigma_3 = 0$.

Les directions principales :

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\{n_3\} = \{z\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n_1 n_2 z}$$

Contraintes principales

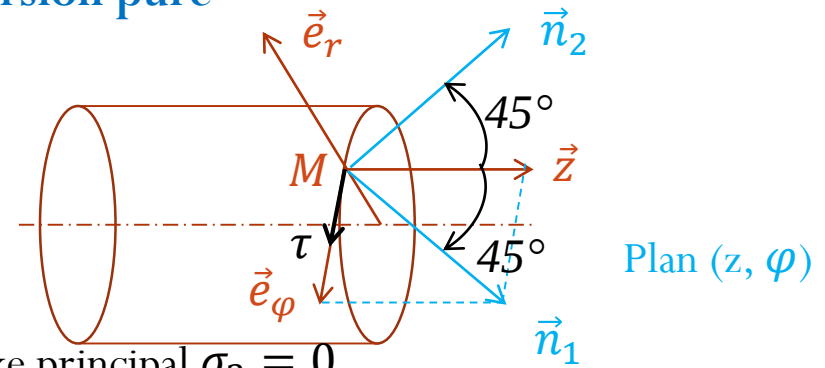
VIII. Etats de contrainte particuliers

Torsion pure

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}_{r \varphi z}$$

Le repère $\{M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{z}\}$ n'est pas principal.

$\vec{e}_r$: Axe principal $\sigma_3 = 0$

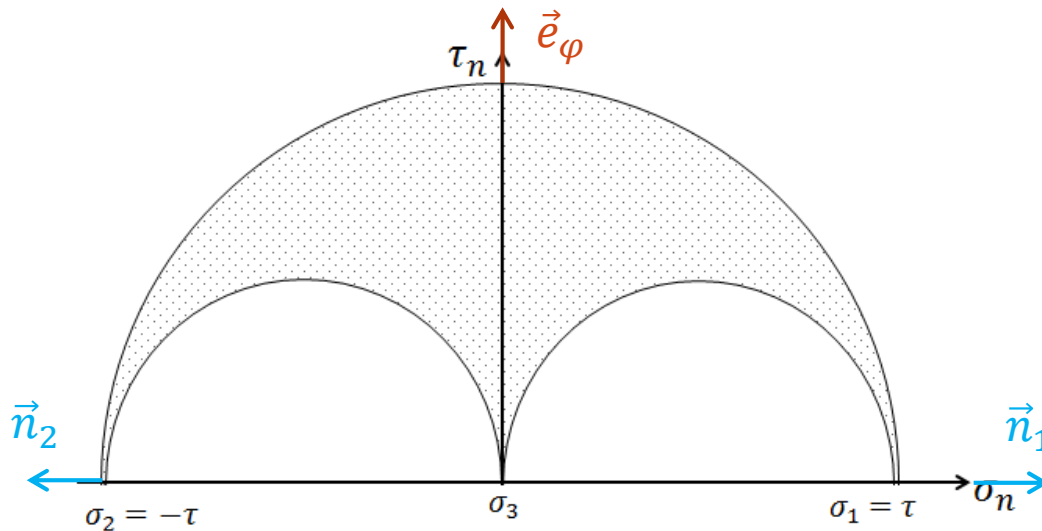


Les directions principales :

$$\{n_1\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_1 \text{ et } \vec{n}_2 \in \text{Plan } (z, \varphi)$$

$$\{n_2\} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\{n_3\} = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Cercles de Mohr

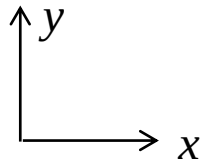
Contraintes principales :

$$\sigma_1 = \tau, \sigma_2 = -\tau \text{ et } \sigma_3 = 0.$$

$$2\theta = 90^\circ$$

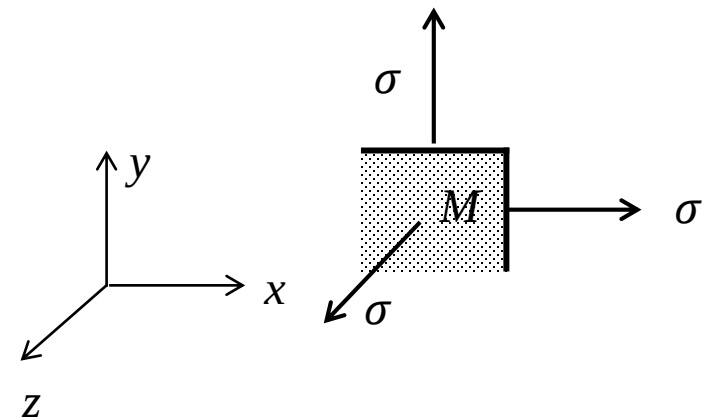
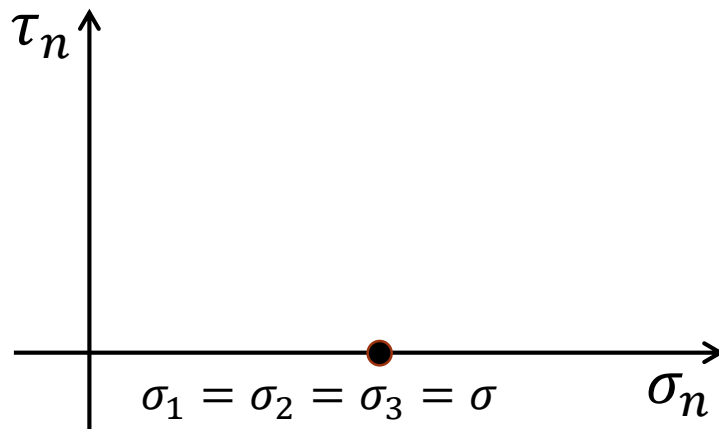
$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \tau & 0 & 0 \\ 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{n_1 n_2 r}$$

Contraintes principales

$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}$$


$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma \vec{n} \quad \forall \vec{n}$$

Toute facette $\vec{n}$ en M est face principale.



Contraintes principales

Soit l'état plan de contrainte :

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$$

Trouver les contraintes et les directions principales analytiquement puis graphiquement par le tri cercle de Mohr.

Contraintes principales ??

Solution analytique

Directions principales ??

La direction z est une direction principale ($\vec{n}_3 = \vec{z}$) et la contrainte principale associée est nulle : ($\sigma_3 = 0$)

Les deux autres **contraintes principales** σ_1 et σ_2 sont racines de l'équation caractéristique :

$$P(\sigma_n) = \det([\sigma(M)] - \sigma_n[I]) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_n \end{vmatrix} = 0$$



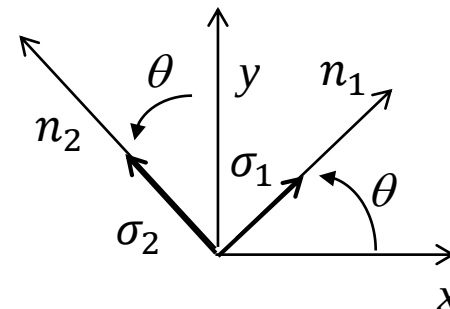
$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

Les deux **directions principales** $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ se trouvent sur le plan (x,y) et s'obtiennent en résolvant l'équation :

$$\vec{n}_1 ?? \quad ([\sigma(M)] - \sigma_i[I])\{n_i\} = \{0\}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_1 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} - \sigma_1 \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix} = 0$$

$$\text{Avec : } \tan\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}}$$

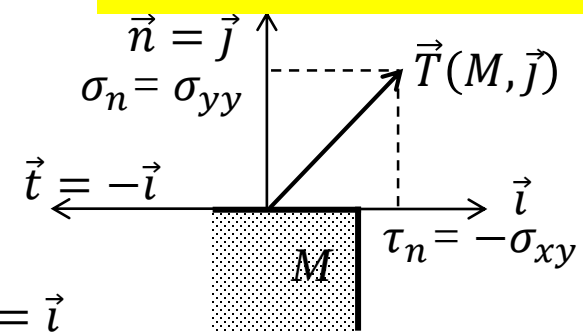
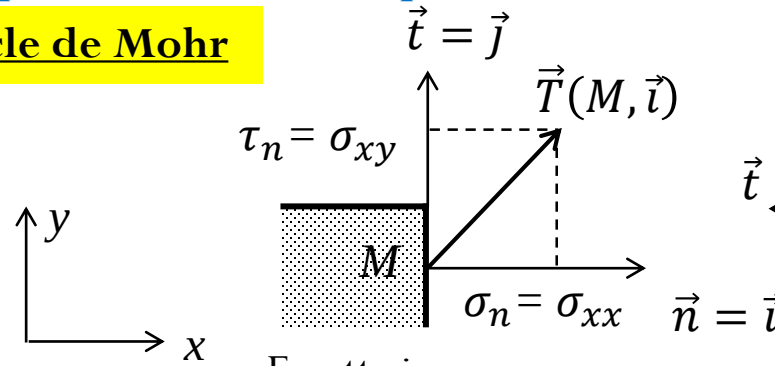


$$\vec{n}_1 = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{Bmatrix}$$

$$\vec{n}_2 = \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix}$$

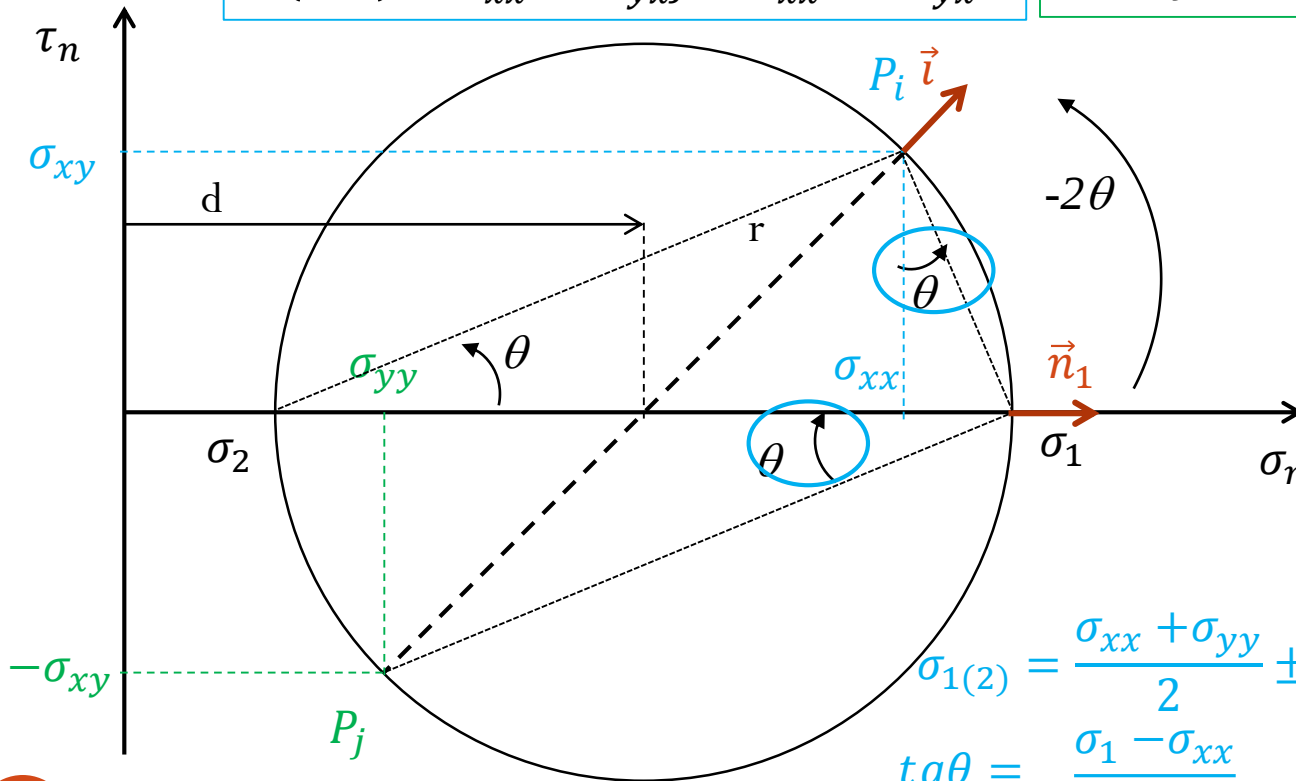
Solution graphique : Cercle de Mohr

Meth1



$$\vec{T}(M, \vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j} = \sigma_{xx}\vec{n} + \sigma_{yx}\vec{t}$$

$$\vec{T}(M, \vec{j}) = \sigma_{xy}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} = \sigma_{yy}\vec{n} - \sigma_{xy}\vec{t}$$



$$\bar{\bar{\sigma}}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$d = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

Meth2

$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$

$$tg\theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}}$$

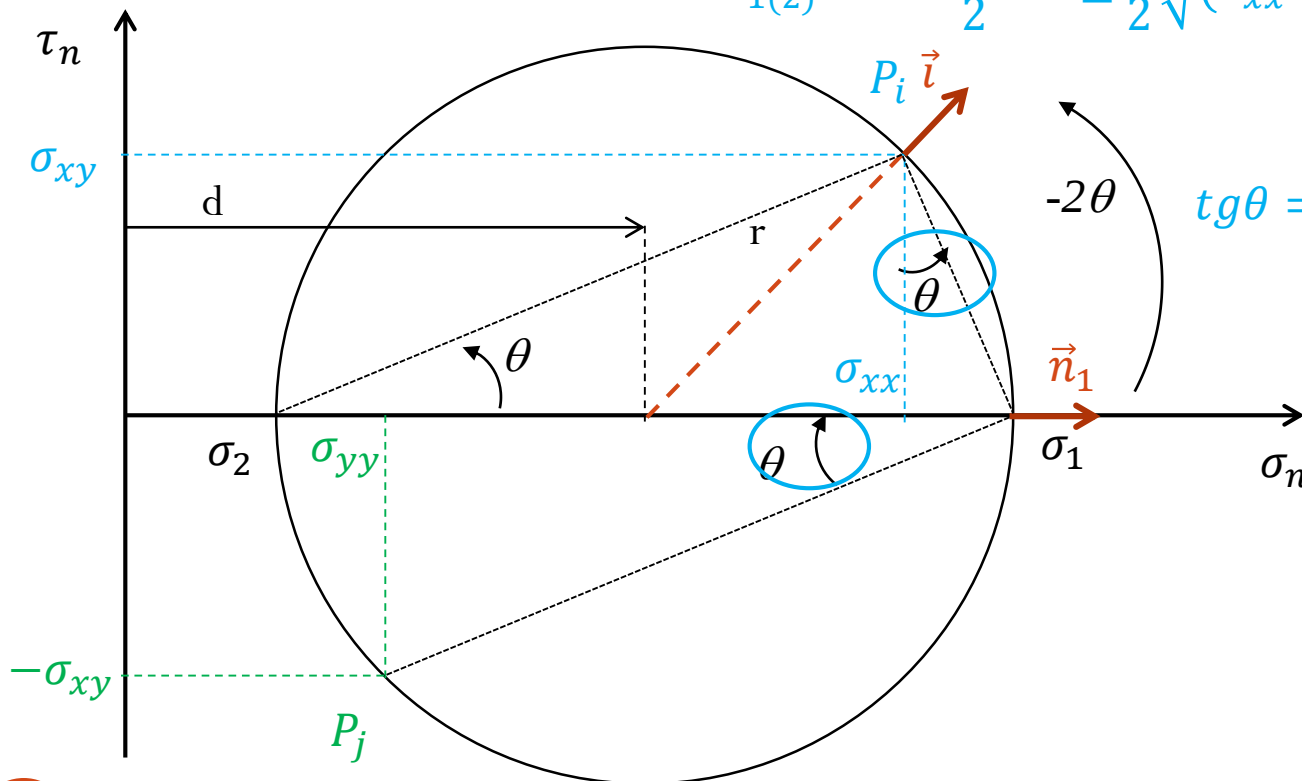
Solution graphique : Cercle de Mohr

Meth2

$$\bar{\sigma}(M) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad r = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1(2)} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + 4\sigma_{xy}^2}$$



$$\tan \theta = \frac{\sigma_1 - \sigma_{xx}}{\sigma_{xy}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_1 - \sigma_{yy}}$$

$$\bar{\bar{\sigma}}(P) = \begin{pmatrix} 0.7 & 3.6 & 0 \\ 3.6 & 2.8 & 0 \\ 0 & 0 & 7.6 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$$

Soit l'état de contrainte suivant :

1. Trouver les contraintes principales et les directions principales analytiquement,
2. Refaire la question graphiquement par le tri cercle de Mohr,

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

Soit le vecteur unitaire $\vec{n} = 1/3.(1, 2, 2)$. Sur la facette $\vec{n}$:

- (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
- (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
- (c) Calculer les composantes et le module du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$,

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 0 \\ -40 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Soit le vecteur unitaire $\vec{n} = 1/\sqrt{5} \cdot (1, 2, 0)$. Sur la facette $\vec{n}$:
 - (a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.
 - (b) Calculer la contrainte normale σ_n .
 - (c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement.
2. Calculer les contraintes et les directions principales (analytique et graphique).
3. Calculer les contraintes équivalentes de Von Mises et Tresca.

$$\sigma_T = \max(|131.23 - 48.77|, |131.23 - 0|, |48.77 - 0|) = 131.23 \text{ Mpa}$$

$$\sigma_{VM} = \text{racine}(0.5((131.23 - 48.77)^2 + (131.23 - 0)^2 + (48.77 - 0)^2)) = 114.89 \text{ MPa}$$

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 0 & \tau & \tau \\ \tau & 0 & \tau \\ \tau & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

Calculer analytiquement les contraintes et les directions principales.