

MODULE

NOMBRES



Pr: B.BETTIOUI



PLAN

1-BREVE DESCRIPTION DES MATHEMATIQUES

2-ENSEMBLES DE NOMBRES

3-ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

4-ENSEMBLE DES ENTIERS RELATIFS

5-L'ENSEMBLE DES NOMBRES RATIONNELS

6-L'ENSEMBLE DES NOMBRES RÉELS

7-NOMBRES IRRATIONNELS

8-L'UNIVERS DU NOMBRE π

I-BREVE DESCRIPTION DES MATHEMATIQUES

I.I-VOCABULAIRE USUEL :

Définition

- Une définition est un énoncé dans lequel on décrit les particularités d'un objet mathématique

Axiome

- Un axiome est un énoncé supposé vrai à priori et que l'on ne cherche pas à démontrer

Proposition ou assertion

- Une proposition est un énoncé pouvant être vrai ou faux

Théorème

Un
théorème
est une
proposition
vraie

Corollaire

Un corollaire
à un
théorème est
un théorème
qui en est
conséquence

Lemme

Un lemme est
un théorème
préparatoire à
l'établissement
d'un
théorème de
plus grande
importance

Conjecture

Une conjecture
est une
proposition que
l'on suppose
vraie
sans parvenir à
la démontrer

axiomes

- Par un point extérieur à une droite, il passe une et une seule droite parallèle qui lui est parallèle.
- Si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que le successeur de chaque élément de A est dans A , alors $A = \mathbb{N}$

Théorèmes

- théorème de PYTHAGORE ; théorème des valeurs intermédiaires ; théorème de ROLLE ; théorème du point fixe ; théorème de GAUSS ; théorème de FERMAT ; ...

Conjectures

- Tout nombre entier pair strictement supérieur à 3 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.
- Il existe une infinité de nombres premiers jumeaux.

Théorème de Fermat-Wiles

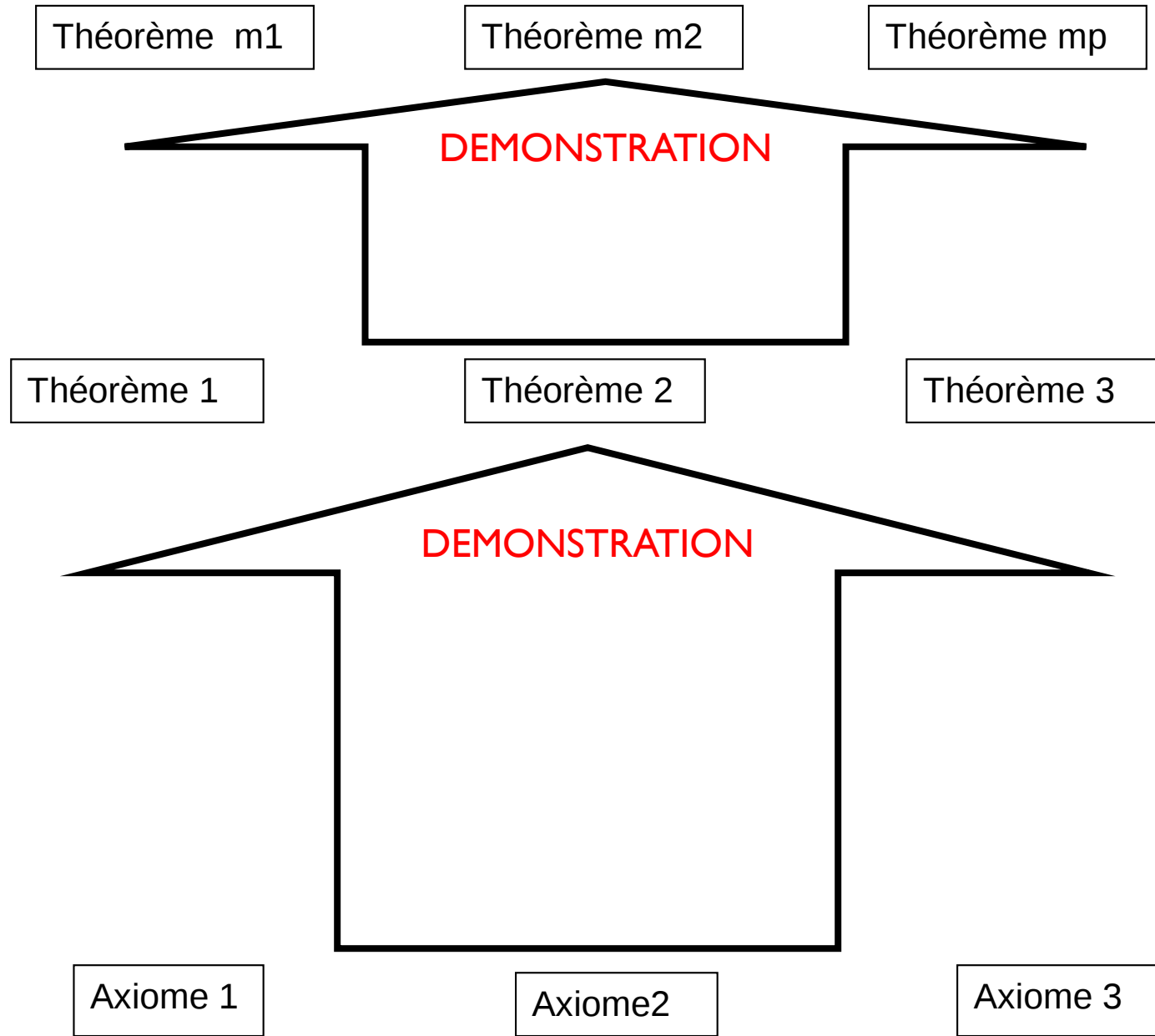
Il n'y a aucun triplet de nombres naturels non nuls x, y, z tels que $x^n + y^n = z^n$ pour $n \geq 3$.

Pierre de Fermat écrivait, en 1637, en marge d'une traduction de l'Arithmetica de Diophante, à la suite de l'énoncé de ce problème:
J'ai trouvé une merveilleuse démonstration de cette proposition, mais la marge est trop étroite pour la contenir.

En 1993, après sept ans de travail, A. Wiles annonce à l'Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences qu'il a montré le dernier théorème de Fermat. Il soumet sa preuve à "Inventiones Mathematicae" mais les referees trouvent une faute. Il arrive à la corriger en 1994 à l'aide de R. Taylor.

Sa démonstration a été concentré sur les courbes elliptiques et Plus précisément sur la conjecture de Shimura-Taniyama , si importante En théorie des nombres

THEORIE MATHEMATIQUE



II-APERÇU HISTORIQUE :

- Pour les mathématiques de l'antiquité, un nombre est un entier ou une fraction. En outre les considérations géométriques étant reines à l'époque, un nombre est souvent le représentant de la longueur d'un segment d'une droite.
- L'idée de nombre qu'Euclide présente dans son traité est donc géométrique. Pour lui un nombre b est mesurée par un nombre a si l'on peut faire tenir a un nombre de fois donnée dans b . dans le langage moderne cela revient à dire que « a mesure b » si « b est un multiple de a ».

III-ENSEMBLES DE NOMBRES

- $\mathbb{N}$ = ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$ = ensemble des entiers relatifs

Un entier relatif se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif.

- $$D = \left\{ \frac{a}{10^p} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } p \in \mathbb{N} \right\}$$

= ensemble des nombres décimaux.

Un nombre décimal est un nombre qui peut se mettre sous forme d'une fraction dont le numérateur est un entier et le dénominateur est une puissance de 10.

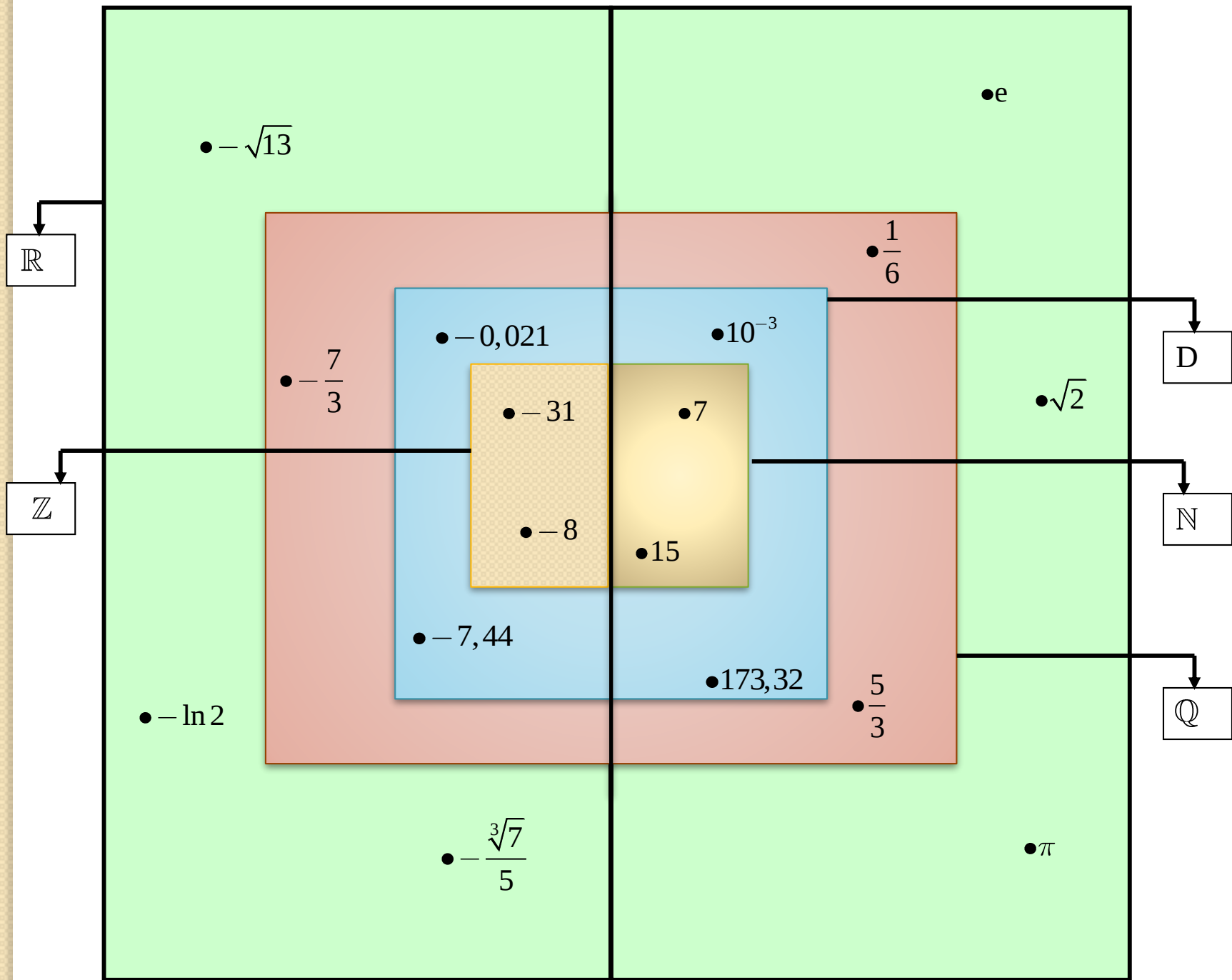
➤ $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N}^* \right\}$
= ensemble des nombres rationnels.

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous forme d'un rapport de deux entiers dont le dénominateur est non nul .

➤ $\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels.

➤ $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$ = ensemble des nombres irrationnels.

Un nombre irrationnel est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous forme de quotients de deux entiers relatifs. On s'est aperçu de l'existence de tels nombres depuis l'antiquité (comme $\sqrt{2}$).



- l'ensemble des nombres complexes :

$$\mathbb{C} = \{a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$$

- l'ensemble des quaternions :

$$K = \{a + ib + cj + dk / (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4\}$$

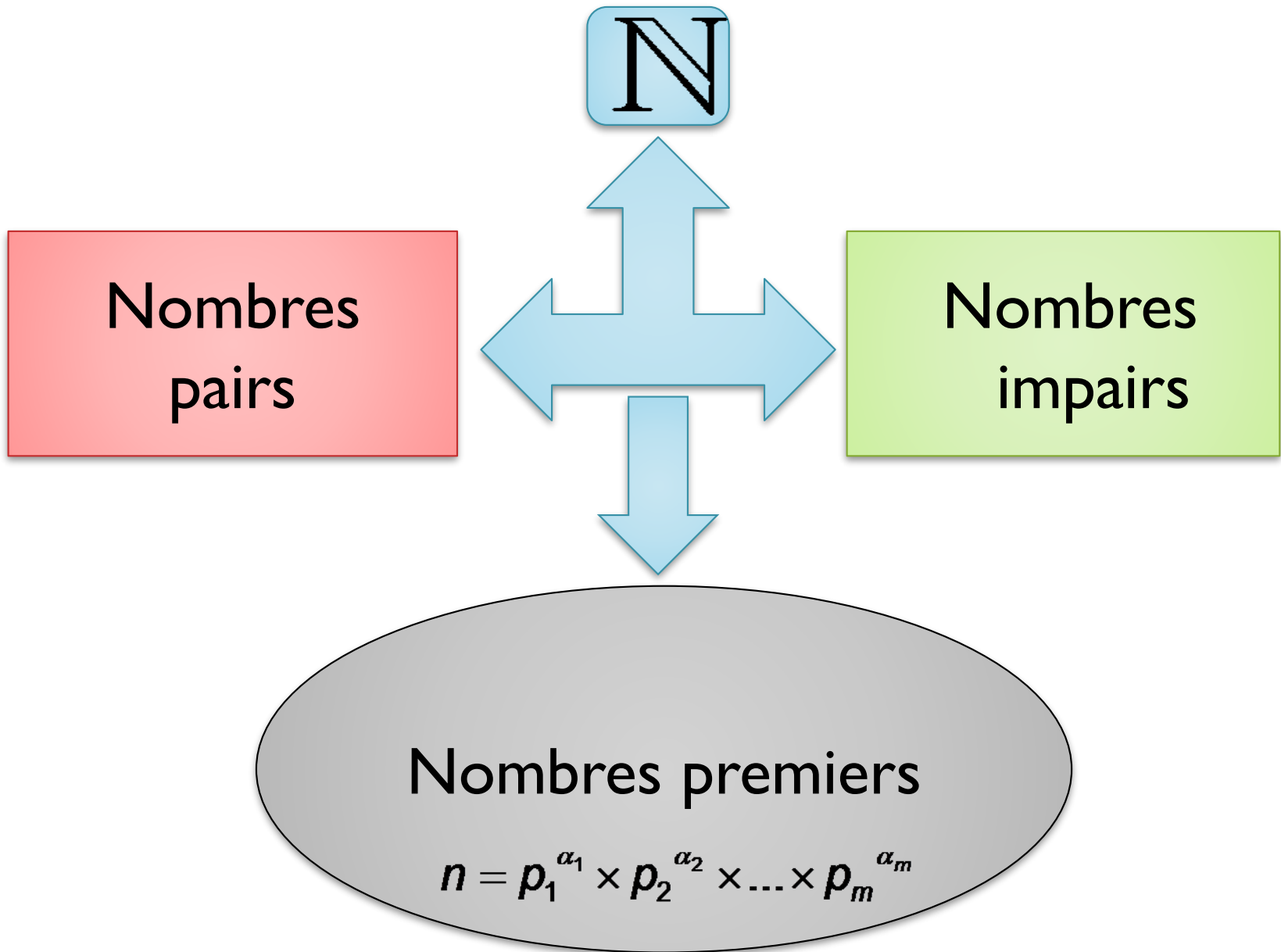
*tels que: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k, jk = i, ki = j$
 $ji = -k, kj = -i, ik = -j$.*

- 
- l'ensemble O des octonions qui est une extension non-associative des quaternions. c'est une algèbre à 8 dimensions sur les réels.
 - l'ensemble S des sédénions qui est une extension de l'ensemble O et forme une algèbre à 16 dimensions sur les réels.

1	i	j	k	ℓ	ℓi	ℓj	ℓk
i	-1	k	$-j$	$-\ell i$	ℓ	$-\ell k$	ℓj
j	$-k$	-1	i	$-\ell j$	ℓk	ℓ	$-\ell i$
k	j	$-i$	-1	$-\ell k$	$-\ell j$	ℓi	ℓ
ℓ	ℓi	ℓj	ℓk	1	i	j	k
ℓi	$-\ell$	$-\ell k$	ℓj	$-i$	1	k	$-j$
ℓj	ℓk	$-\ell$	$-\ell i$	$-j$	$-k$	1	i
ℓk	$-\ell j$	ℓi	$-\ell$	$-k$	j	$-i$	1

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	E_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
1	1	e_1	e_2	e_3	E_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	E_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	e_9	$-e_8$	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	E_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	e_{10}	e_{11}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	E_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	$-e_8$	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	$-e_8$	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	e_9	$-e_8$	e_{11}	$-e_{10}$
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	e_{10}	$-e_{11}$	$-e_8$	e_9
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	e_{11}	e_{10}	$-e_9$	$-e_8$
e_8	e_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_{12}$	$-e_{13}$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	-1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_9	e_9	e_8	$-e_{11}$	e_{10}	$-e_{13}$	e_{12}	e_{15}	$-e_{14}$	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	e_7	$-e_6$
e_{10}	e_{10}	e_{11}	e_8	$-e_9$	$-e_{14}$	$-e_{15}$	e_{12}	e_{13}	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$	$-e_6$	$-e_7$	e_4	e_5
e_{11}	e_{11}	$-e_{10}$	e_9	e_8	$-e_{15}$	e_{14}	$-e_{13}$	e_{12}	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1	$-e_7$	e_6	$-e_5$	e_4
e_{12}	e_{12}	e_{13}	e_{14}	e_{15}	E_8	$-e_9$	$-e_{10}$	$-e_{11}$	$-e_4$	e_5	e_6	e_7	-1	$-e_1$	$-e_2$	$-e_3$
e_{13}	e_{13}	$-e_{12}$	e_{15}	$-e_{14}$	E_9	e_8	e_{11}	$-e_{10}$	$-e_5$	$-e_4$	e_7	$-e_6$	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_{14}	e_{14}	$-e_{15}$	$-e_{12}$	e_{13}	E_{10}	$-e_{11}$	e_8	e_9	$-e_6$	$-e_7$	$-e_4$	e_5	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_{15}	e_{15}	e_{14}	$-e_{13}$	$-e_{12}$	E_{11}	e_{10}	$-e_9$	e_8	$-e_7$	e_6	$-e_5$	$-e_4$	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Ensemble des entiers naturels



➤ quelques grands nombres premiers :

- Un nombre de Fermat en 1640 :
616318177
- Un nombre en 1963 : avec 3376 chiffres.
- Un nombre en 1971 : avec 6002 chiffres.
- Le plus grand nombre connu : $2^{77.232.917} - 1$
de 23 millions de chiffres.
(nombre premier de Mersenne)

➤ les nombres premiers se font plus rares dès qu'ils deviennent plus grands :

- entre 1 et 10, il y a 40% de nombres premiers.
- entre 1 et 100, il y'en a 25 %.
- entre 1 et 1000, on trouve 16,8 %
- entre 1 et 1.000.000.000 il n'y en a plus de 4,8 %.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

quelques théorèmes sur les nombres premiers

Théorème 1 :

P est infini

Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x .

Théorème de raréfaction de légendre (1752-1833)

$$\frac{\pi(x)}{x} \rightarrow 0 \quad qd \quad x \rightarrow +\infty$$

Théorème 2 (1896)

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)} \quad qd \quad x \rightarrow +\infty$$

$$x = 100 \rightarrow \frac{x}{\ln(x)} \approx 21,71 \rightarrow \pi(x) = 25$$

$$x = 200 \rightarrow \frac{x}{\ln(x)} \approx 37,74 \rightarrow \pi(x) = 46$$

$$x = 1000 \rightarrow \frac{x}{\ln(x)} \approx 144,76 \rightarrow \pi(x) = 168$$

$$x = 10000 \rightarrow \frac{x}{\ln(x)} \approx 1085,73 \rightarrow \pi(x) = 1229$$

Quelques conjectures sur les nombres premiers

Conjecture de Goldbach (1742)

Tout nombre entier pair ≥ 4 peut être écrit comme la somme de deux nombres premiers.

Par exemple:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

Cette conjecture a été vérifiée par ordinateur pour tous les nombres pairs jusqu'à $1,1 \times 10^{18}$ (2008).

Conjecture des nombres premiers jumeaux

Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + 2$ soit aussi premier.

Par exemple:

3, 5 5, 7 11, 13 41, 43

sont des premiers jumeaux; 7, 11 ne sont pas jumeaux.

Le plus grand couple connu est

$2.003.663.6132^{195.000} - 1, 2.003.663.6132^{195.000} + 1$.

Ces deux nombres possèdent **58.711** chiffres.

Conjecture de Polignac (1849)

Pour tout k pair, il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p + k$ est premier aussi.

Ensemble des entiers relatifs

Fragments d'histoire :

- chez les indous et les chinois (au 1^{er} siècle), les nombres négatifs apparaissent comme représentant de dettes et les nombres positifs comme recettes.
Cependant le nombre reste encore attaché à des quantités physiques et le nombre négatif n'a guère le statut légal.
- A cet égard, les grandes difficultés sont de justifier :

- 
- l'existence de quantités négatives isolées : si zéro c'est « rien », une quantité négative est « moins que rien », quel sens lui donner ?
 - la règle des signes pour le produit. L'usage du modèle des gains et des pertes introduit naturellement l'addition, mais pose problème pour la multiplication. Quel sens a une phrase comme : « une dette multipliée par une dette donne un bien » ?

- 
- Le problème étant que le nombre est vu en relation avec une opération de dénombrement ou de mesure. Une grandeur ne peut être plus petite que zéro car cela revient à concevoir une quantité négative comme moins que rien et c'est effectivement une impasse.

- 
- De ce fait, les nombres négatifs posent vraiment des difficultés spécifiques aux élèves. D'une part, pour la première fois, ils sont confrontés à des nombres qui n'expriment pas des quantités ou des grandeurs. Ce qui constitue une rupture importante avec les nombres manipulés jusque là. D'autre part, la notation habituelle de ce nombre utilise le signe qui est, pour les élèves lié à une opération de calcul, qui est la soustraction.

- 
- Il paraît peut être plus fécond d'envisager une approche plus théorique de ces nouveaux nombres, en cherchant des nombres qui rendent la soustraction toujours possible et dont le maniement est ensuite compatible avec les propriétés des opérations mises en évidence sur les nombres positifs.



Pour conclure, on peut introduire les nombres négatifs dans différents contextes :

*Contextes concrets :

recette et dépenses, gain et pertes, température, altitudes, chronologie,...

*Contextes de repérage

*Contexte interne aux mathématiques :
résolution des équations

L'ensemble des nombres décimaux :

- Un nombre décimal est un nombre qui peut se mettre sous forme d'une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10.

Exemple : $237,27 = \frac{23727}{10^2}$; $-19,465 = \frac{-19465}{10^3}$

■ Les puissances de 10 :

$$10^n = \underbrace{10 \dots 0}_{n \text{ zéros}} \quad ; \quad 10^{-n} = \underbrace{0,0 \dots 01}_{n \text{ zéros}}$$

$$10^0 = 1$$

- Les puissances de 10 permettent de simplifier l'écriture des grands nombres (en astronomie) ou des très petits nombres (en microbiologie ...)

L'ensemble des nombres rationnels :

- Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'exprimer comme quotient de deux entiers relatifs dont le dénominateur est non nul. De ce fait, tout entier relatif est aussi considéré comme nombre rationnel, lorsque le dénominateur vaut 1.
- le développement décimal des nombres rationnels a la particularité d'être périodique à partir d'une certaine décimale.

- Propriétés des nombres rationnels :

*Un nombre est rationnel si et seulement si son développement décimal est périodique à partir d'un certain chiffre.

*L'ensemble des nombres rationnels est dénombrable.

Passage de l'écriture décimale périodique à l'écriture fractionnaire :

- **Exemple :**

$$\begin{aligned}0,373737\dots\dots\dots &= 0,37 \times 1,010101\dots\dots\dots \\&= 0,37 \times (1 + 10^{-2} + 10^{-4} + \dots) \\&= 0,37 \times \frac{1}{1 - 10^{-2}} \\&= 0,37 \times \frac{1}{0,99} \\&= \frac{37}{99}\end{aligned}$$

L'ensemble des nombres réels:

- On peut définir un nombre réel comme étant un nombre qui peut être représenté par une partie entière et une liste finie ou infinie de décimales.
- Dans l'ensemble des nombres réels, on distingue:
 - *Les nombres rationnels (déjà définis).
 - *Les nombres irrationnels qui forment l'ensemble : $\mathbb{R} / \mathbb{Q}$

■ NOMBRES IRRATIONNELS:

- Un nombre irrationnel est un nombre qui peut être représenté par une partie entière est une liste infini de décimales non répétitives.
- Les plus célèbres nombres irrationnels sont: $\sqrt{2}$, π , e
 - L'irrationalité de $\sqrt{2}$ fut démontré par les grecs cinq siècle avant notre ère.
 - L'irrationalité de π est attribuée à Lambert quant à celle de e elle fut démontrée par Euler.

- Parmi les nombres réels on distingue deux catégories:

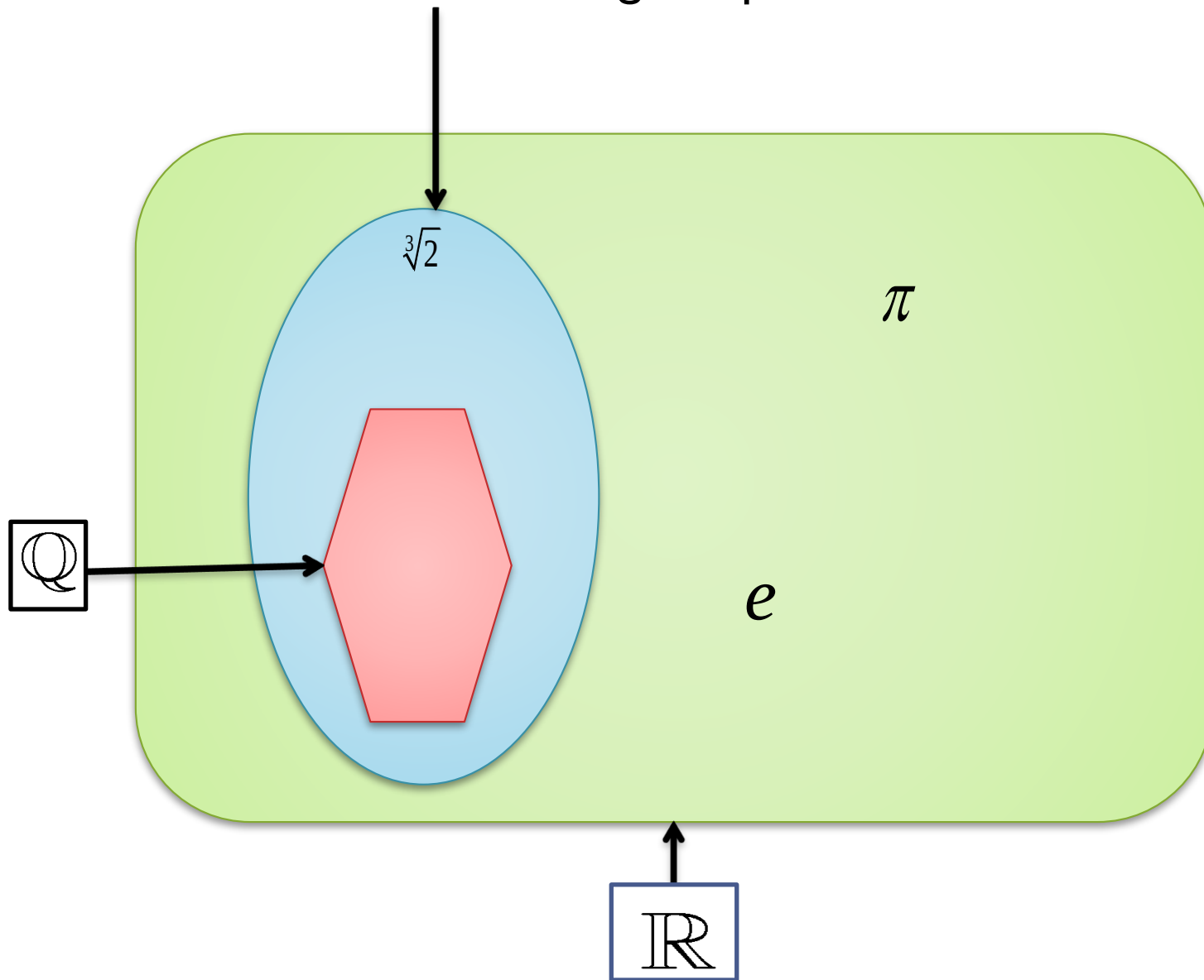
*Les nombres algébriques:

Un nombre réel est dit algébrique s'il est racine d'au moins un polynôme à coefficients entiers (tout les rationnels+des nombres irrationnels comme $\sqrt[n]{2}$).

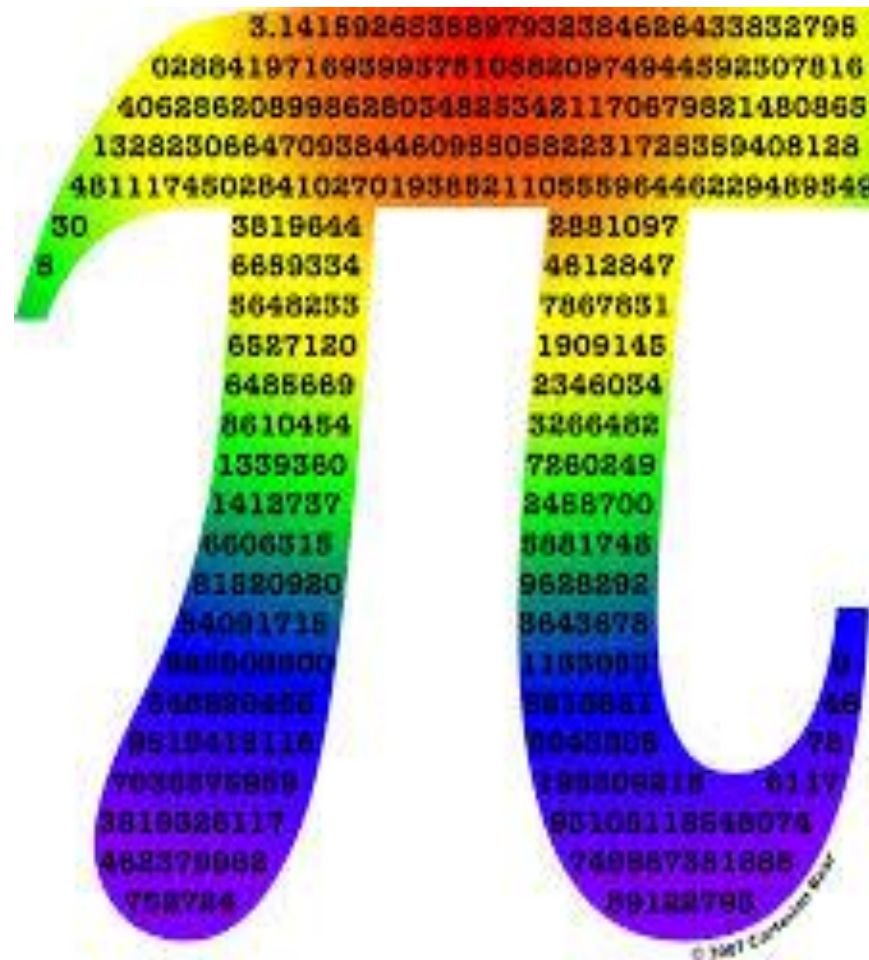
*Les nombres transcendants:

Nombres non algébrique comme e .

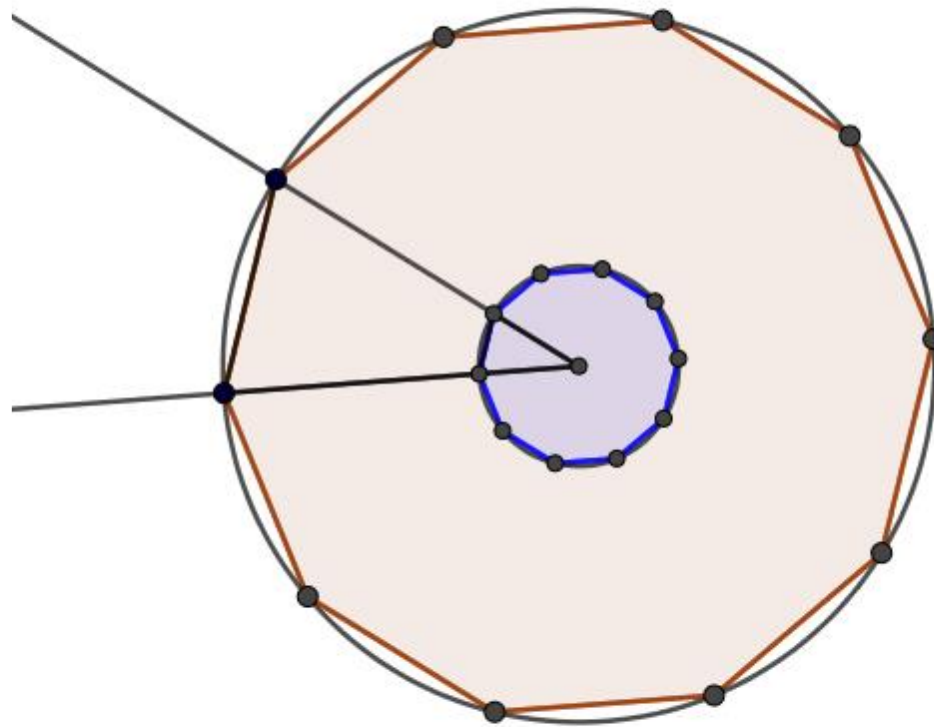
L'ensemble de nombres algébriques



L'UNIVERS DU NOMBRE Pi



- Le nombre π est peut être l'entité mathématique la plus connue dans le monde. Apparu dès l'antiquité, en tant que rapport du périmètre d'un cercle sur son diamètre



- 
- Ce nombre n'a cessé de susciter l'intérêt de l'homme en mathématiques. Le grand jeu des mathématiciens de toutes les époques a toujours été de définir avec le plus de précisions les premières décimales de π . Cependant, on pourrait s'interroger sur l'utilité de connaître autant de décimales, alors que l'on sait que ce nombre de décimales est infini et non périodique.

I-l'irrationalite de pi

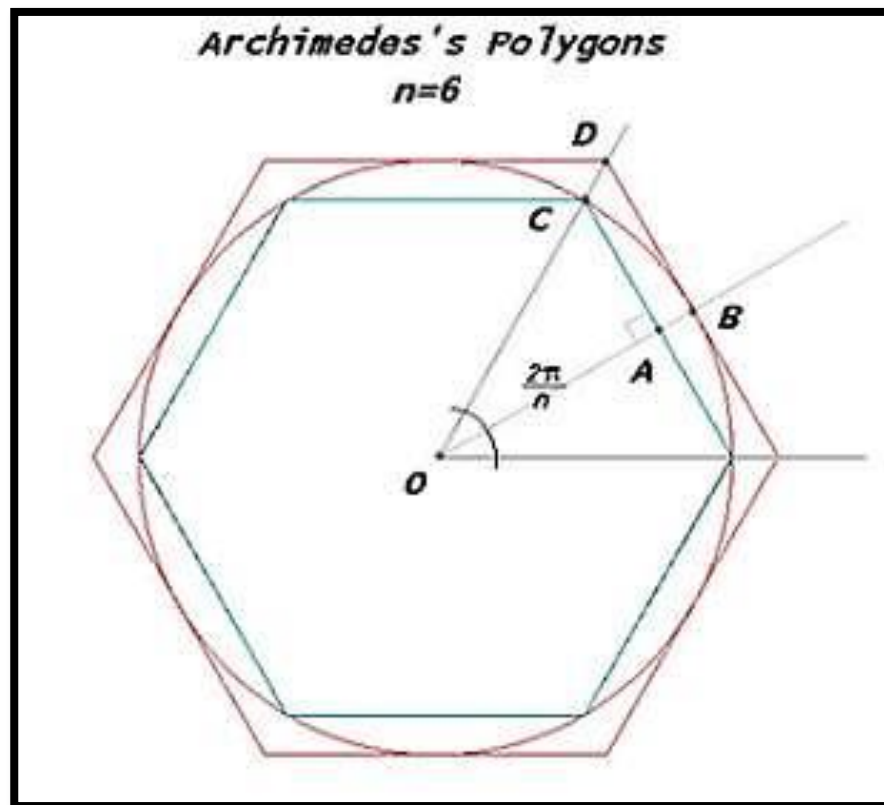
- La première démonstration a été proposée en 1761 par JOHANN HEINRICH LAMBERT elle consiste à prouver que si " x est un rationnel non nul, alors $\tan(x)$ est irrationnel".

2-Recherche des décimales du nombre

Pi

2.1.La Méthode de duplication d'Archimède:

- Archimède (287 – 212 avant J.C), pour approcher pi, propose de considérer un cercle de rayon 1 et d'encadrer le demi périmètre du cercle par les demi périmètres des polygones réguliers à côtés exinscrits et inscrits dans le cercle. Il est implicite qu'en prenant n de plus en plus grand, on pourrait obtenir une valeur approchée de pi aussi précise qu'on veut. Mais cela prendrait beaucoup de temps et de calculs. Avec 3072 côtés, on obtient une approximation de pi avec juste 7 décimales précises.



Aproximation de pi par la méthode d'Archimède.ggb



3.141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286209954679640721661666428272600526284629908329881480905914284784987122708696149613687202049430238139662917461

2.2. Les Formules de l'Arctangente:

Avec l'invention du calcul différentiel et surtout les séries infinies au XVII^{ème} siècle, le calcul des décimales de pi a connu une révolution en utilisant le développement suivant:

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \dots$$

Donc:

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

Mais la convergence est très lente. Par ailleurs, en faisant 50.000 additions, on n'obtient que trois décimales exactes de pi.

En 1706 JOHN MACHIN propose la formule suivante:

D'où:
$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

$$\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 \left[4 \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)5^{2k+1}} - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)239^{2k+1}} \right]$$

Notons qu'avec $n = 20$ c'est-à-dire qu'à peine avec 40 additions, on trouve 30 décimales exactes de pi.

Autres formules du type MACHIN

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{70}\right) + 10 \arctan\left(\frac{1}{99}\right) \text{ (Euler, 1764)}$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \text{ (John Dahse, 1844)}$$

$$\frac{\pi}{4} = 3 \arctan\left(\frac{1}{4}\right) + \arctan\left(\frac{1}{20}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1985}\right) \text{ (S.L. Louey, 1893)}$$

- La meilleur actuellement sur le marché est celle de STOMER, découverte en 1896:

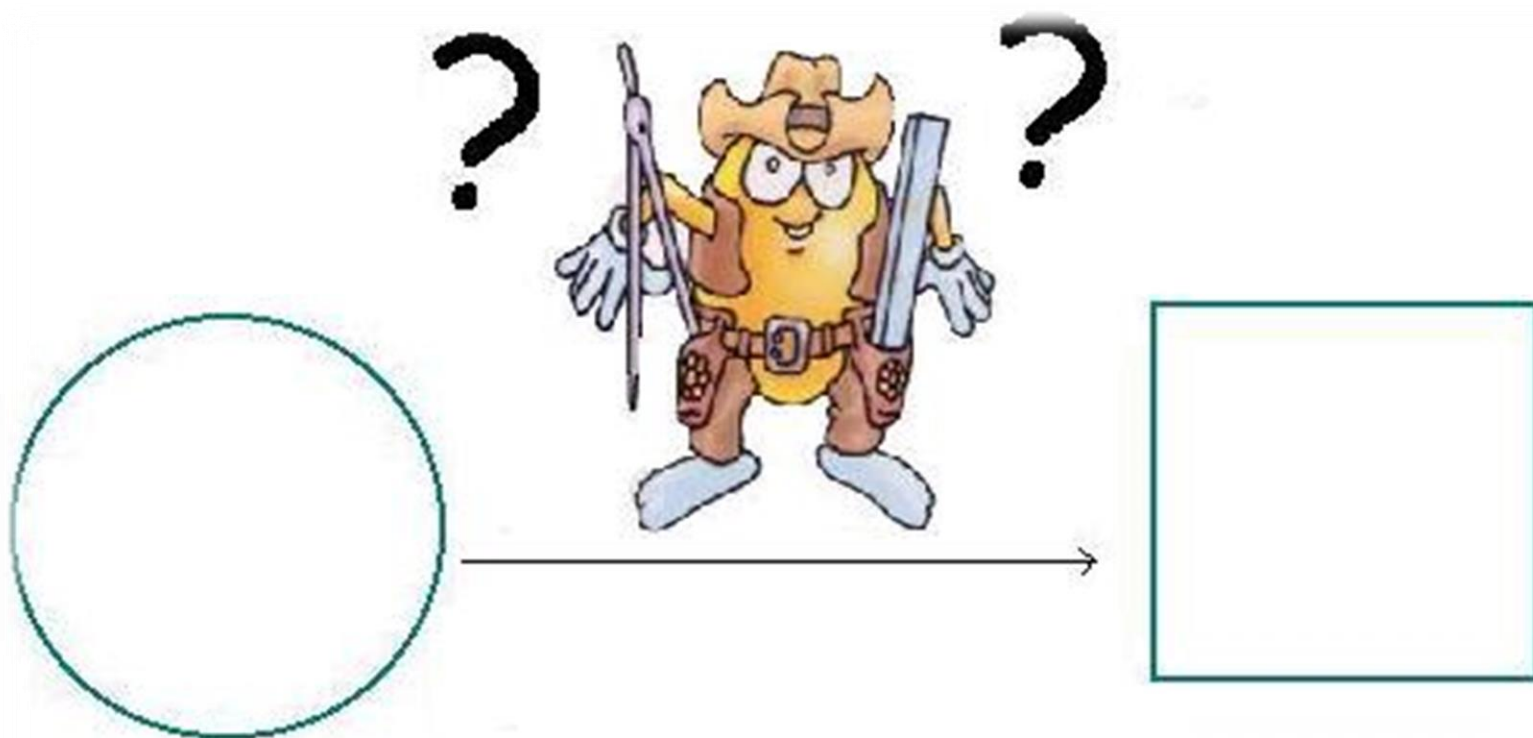
$$\frac{\pi}{4} = 44 \arctan\left(\frac{1}{57}\right) + 7 \arctan\left(\frac{1}{239}\right) - 12 \arctan\left(\frac{1}{682}\right) + 24 \arctan\left(\frac{1}{12943}\right)$$

Année	Nombre de décimales exactes	Auteurs
1949	1000	Fergusen – Wrench
1958	10.000	Genuys
1961	100.000	Shanks-Wrench
1973	1.000.000	Guilloud-Bouyer
1982	10.000.000	Kanada-Yoshindo-Tamura
1987	100.000.000	Kanada-Tamura-Kobo
1989	1.000.000.000	Chudnovsky
1997	50.000.000.000	Kanada-Takahaschi
1999	200.000.000.000	Kanada-Takahashi
2010	2699.999.990.000	Bellard
2015	10.000.000.000.050	Alexander J.Yee – Shigeru Kondo

3-la transcendance de pi:

- Ce résultat a été démontré en 1882 par FERDINAND VON LINDEMANN, résolvant ainsi un problème géométrique de l'antiquité, appelé: "Quadrature du cercle".

4-la quadrature du cercle:



Peut-on, à l'aide de la règle et d'un compas, fabriquer un carré de même aire que le disque?

Le problème est de savoir s'il est possible de construire à la règle et le compas, un carré dont la surface est la même qu'un cercle. Donc la quadrature du cercle nécessite la construction à la règle et le compas de $\sqrt{\pi}$.

- Or Pierre Laurent Wantzel démontra en 1837 que seuls sont constructibles, à la règle et le compas, les nombres réels solutions de polynômes de degré 2^n et à coefficients entiers. Donc les nombres constructibles à la règle et le compas sont des nombres algébriques. Et puisque $\sqrt{\pi}$ est transcendant, on déduit que la quadrature du cercle est impossible.



Histoire des mathématiques